Lösen quadratischer Gleichungen

Was sind quadratische Gleichungen?

Gleichungen

Gleichungen sind grundsätzlich alle mathematischen Erscheinungen, bei denen ein Gleichheitszeichen „=“ zwischen zwei mathematischen Ausdrücken (z.B. Termen) steht.
Hier ein paar einfache Beispiele:

$1+2=3$ $a=b$ $r+1=8$ $a+b=2-c$ usw.

Lineare Gleichungen

Nun haben manche Sorten von Gleichungen spezielle Namen. Gleichungen nach der folgenden Art nennt man lineare Gleichungen:

$q+2=3$ $r-5=17$ $3s+2=s$ $0{,}23y=0{,}46y+13$ usw.

Man erkennt sie daran, dass **genau eine Unbekannte** (repräsentiert durch den Buchstaben) **ausschließlich in der ersten Potenz** (also „hoch eins“) darin vorkommt, deren Wert sich ziemlich einfach durch Addieren, Subtrahieren sowie Multiplizieren und Dividieren mit Zahlen herausfinden lässt.

Quadratische Gleichungen

Das Wort „Quadrat“ hat natürlich nichts damit zu tun, dass die Gleichungen irgendwie viereckig hingeschrieben werden. „Quadratisch“ bezieht sich lediglich auf das Vorkommen der **Variablen**, die eben, anders als bei den linearen Gleichungen, auch in der **zweiten Potenz** auftritt. Beispiele:

$x^2=25$ $r^2-5=11$ $(i+4)^2-4=5$ $k^2+2k-3=60$ $e(1{,}3-e)=0$

Aus Schülersicht stellen sie immer ein gewisses Schreckgespenst dar, weil sie anfangs entsetzlich schwierig zu lösen sind. Versuchen wir mal, dieses Gespenst zu verjagen.

Lösen quadratischer Gleichungen

Was heißt „Lösen“?

Wenn im Zusammenhang mit Gleichungen das Wort „Lösen“ auftaucht, dann bedeutet es, dass man Zahlenwerte für die Variable finden will, so dass die die Gleichung stimmt. Ein Beispiel:

Setzt man in der Gleichung $x^2=25$ für x 5 ein, dann stimmt sie. Setzt man 8 ein, stimmt sie nicht.
Aber Vorsicht! Man kann auch –5 einsetzen, denn $(-5)\cdot(-5)$ ergibt auch 25.

Bis zu zwei Lösungen

Das vorige Beispiel weist schon darauf hin, dass es bei quadratischen Gleichungen oft (nicht immer) zwei Lösungen gibt. Manchmal gibt es auch nur eine, manchmal auch gar keine. Diese Uneindeutigkeit ist schon einmal etwas ganz Neues gegenüber den linearen Gleichungen, die üblicherweise eindeutig zu lösen sind. Hier noch ein paar Beispiele für die drei Möglichkeiten.

$x^2 = 25$	$x_1 = 5,\ x_2 = -5$	$L = \{-5;\ 5\}$	
$(f-3)^2 = 0$	$f = 3$	$L = \{3\}$	
$m^2 = -4$	n.l.	$L = \varnothing$	$L = \{\}$

Man beachte die beiden (oder sogar drei) Schreibweisen für die Angabe der Lösung. Beide, sowohl die mit Mengenklammern als auch die mit x_1 und x_2 sind erlaubt. Man muss nicht beide benutzen, aber man darf.

Einfach zu lösende Gleichungen

Es gibt einfach und schwierig zu lösende quadratische Gleichungen. Zunächst mal zu den einfach zu lösenden. Diese erkennt man immer daran, dass die Variable ausschließlich in der zweiten Potenz und nicht auch noch in der ersten Potenz vorkommt, also nur mit dem „hoch zwei", nicht mit dem „hoch eins". Beispiele:

$x^2 = 25 \qquad r^2 - 5 = 11 \qquad 5i^2 = 5 \qquad \frac{1}{4}n^2 - \frac{1}{3} = \frac{13}{9} \qquad 81z^2 + 10{,}3 = 266{,}3$

Bei diesen Gleichungen muss man lediglich, wie bei linearen Gleichungen, ein bisschen hin und her schieben, so lange, bis auf der einen Seite die Variable allein mit ihrer 2 im Exponent steht und auf der anderen Seite eine Zahl. Dann muss man nur noch die Wurzel ziehen, die erste Lösung ist dann eben diese Wurzel, die zweite deren negatives Gegenstück (das bedeutet natürlich auch, dass es nur eine Lösung gibt, wenn die eben erwähnte Zahl eine 0 ist).

Ein Beispiel:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}n^2 - \frac{1}{3} &= \frac{13}{9} && \left| + \frac{1}{3} \right. \\
\frac{1}{4}n^2 &= \frac{16}{9} && | \cdot 4 \\
n^2 &= \frac{64}{9} \\
n_1 = \sqrt{\frac{64}{9}} & \qquad n_2 = -\sqrt{\frac{64}{9}} \\
n_1 = \frac{8}{9} & \qquad n_2 = -\frac{8}{9}
\end{aligned}$$

Bezüglich der Wurzeln ist zu beachten: Die eigentliche Wurzel ist nur die positive Zahl. Die andere heißt „die negative Wurzel".

Mittelschwer zu lösende quadratische Gleichungen

Mittelschwer sind (meiner bescheidenen Meinung nach) solche Gleichungen, bei denen sich die eine Seite unter Zuhilfenahme einer binomischen Formel in einen Klammerausdruck umwandeln lässt oder auch solche, bei denen die Variable zwar in der ersten und der zweiten Potenz auftritt, aber dafür keine weitere Zahl außer Null.

Gleichungen, deren eine Seite sich mit den binomischen Formeln in einen Klammerausdruck umwandeln lässt

Bei solchen Gleichungen geht man so vor: Zunächst die eine Seite eben in einen Klammerausdruck umwandeln, dann die Wurzel ziehen (und deren negatives Gegenstück nicht vergessen), schließlich durch Addition und Subtraktion die Variable auf einer Seite isolieren. Hier ein durchgerechnetes Beispiel.

$$9ö^2 - 12ö + 4 = 36$$

$$(3ö - 2)^2 = 36$$

$$3ö_1 - 2 = 6 \qquad 3ö_2 - 2 = -6 \qquad | +2$$

$$3ö_1 = 8 \qquad 3ö_2 = -4 \qquad | :3$$

$$ö_1 = \frac{8}{3} \qquad ö_2 = -\frac{4}{3}$$

Wichtig ist, darauf sei noch einmal hingewiesen, dass man bei dem Schritt, bei dem man das „hoch 2“ auf der linken Seite weglässt und auf der rechten Seite die Wurzel zieht, die negative Wurzel nicht vergisst.

Letztlich bedeutet die Lösung, dass man die beiden Werte $\frac{8}{3}$ und $-\frac{4}{3}$ für ö einsetzen kann, damit die Gleichung stimmt.

Weitere Beispiele für diesen Gleichungstyp:

$x + 2x + 1 = 1$ $\qquad 64r^2 - 160r + 100 = 0{,}25$ $\qquad 1000000a^2 + 900 - 60000a = 0{,}01$

Gleichungen, bei denen die Variable in der ersten und der zweiten Potenz vorkommt, aber keine sonstige Zahl außer Null.

Hierbei wird Folgendes gemacht: Alles, was nicht Null ist, wird auf eine Seite gebracht. Dann wird die Variable ausgeklammert, so dass ein Produkt aus der Variablen und einer Klammer, die die Variable (vielleicht auch ein Vielfaches von ihr) und eine Zahl enthält, entsteht.
Vorsicht! Nun darf man nicht einfach durch die Variable teilen, weil sonst eine mögliche Lösung verloren ginge. Man muss sowohl die Variable, als auch die Klammer getrennt voneinander gleich Null setzen. Das macht man, weil das Produkt aus den beiden ja Null ist und das nur dann sein kann, wenn einer der beiden Faktoren gleich Null ist.
Zum Schluss rechnet man jeweils die gesuchten Variablenwerte aus.
Auf der nächsten Seite kommt ein Beispiel. Wer gleich am Anfang schreit: Da steht doch noch eine andere Zahl außer der Null, soll sich mal den ersten Umformungsschritt ansehen.

Nun bitte wenden.

$$4e^2+77+2e=\frac{154}{2} \qquad |-77$$
$$4e^2+2e=0$$
$$e(4e+2)=0$$
$$e_1=0 \qquad 4e_2+2=0$$
$$4e_2=-2$$
$$e_2=-\frac{1}{2}$$

Weitere Beispiele für diesen Gleichungstyp:

$c(5-3c)=0$ $\qquad$ $y^2=6y$ $\qquad$ $(27ü-31)ü-98=1-99$ $\qquad$ $t+1=11t^2+0,\overline{9}$

Schwierig zu lösende quadratische Gleichungen

Als diese bezeichne ich hier alle Gleichungen, in denen die Variable in der ersten und in der zweiten Potenz vorkommt und in denen sich eine Zahl außer Null nicht entfernen lässt. Es gibt zwei standardisierte Verfahren zum Lösen dieser Gleichungen: Die **quadratische Ergänzung** und die Lösung mit der **pq-Formel**. Beide Verfahren sind letztlich gleichwertig, es ist nur von der persönlichen Vorliebe abhängig, welches Verfahren man benutzt – außer, die Aufgabenstellung verlangt die Anwendung eines bestimmten Verfahrens. Höhöhö.

Quadratische Ergänzung

Diese Form der Rechnung möchte ich an einem Beispiel erklären. Sehen wir uns mal die folgende Gleichung an:

$$9x^2+30x-12=27$$

Diese Gleichung könnten wir lösen, wenn links ein Term stünde, den wir mit Hilfe einer binomischen Formel in einen Klammerausdruck transformieren könnten. Könnte, könnte, könnte. Is aber leider nicht. Das + vor den 30x deutet nämlich unzweifelhaft darauf hin, dass die erste binomische Formel zuständig wäre. Aber spätestens das – vor der 12 bringt uns zur ernüchternden Erkenntnis, dass diese Formel nicht anwendbar ist, denn laut der Formel müsste da auch ein + stehen. Grmpf. Was machen wir da?

Da uns erstmal gar nichts einfällt, machen wir das, was Mathematiker gern tun (und auch tun sollten, weil sie sonst nicht weiterkommen): Herumspinnen. Wir überlegen also einfach mal, was denn links vom Gleichheitszeichen stehen müsste, damit wir die erste binomische Formel anwenden könnten.

Die $9x^2$ sind ja gemäß der binomischen Formel quasi die Entsprechung zum dortigen a^2. Fein. Dann wäre das a aus der binomischen Formel ja 3x, denn $(3x)^2=9x^2$. Gut, und was hilft das jetzt? Nun, jetzt können wir überlegen, was denn das b aus der binomischen Formel sein könnte. Die –12 hilft uns offensichtlich nicht weiter, weil sie eben gar nicht zu der binomischen Formel passt.

Aber schauen wir mal auf die 30x. Das müsste ja die Entsprechung zu den 2ab aus der binomischen Formel sein. Wenn wir wissen, dass gilt: 2ab = 30x, dann können wir auch b berechnen

$$30x=2ab \qquad |:2$$
$$15x=ab \qquad \text{mit } a=3x \text{ ergibt sich:}$$
$$15x=3xb \qquad |:3x$$
$$5=b$$

Hurra, nun wissen wir, dass b = 5 sein müsste und demnach $b^2 = 25$. Da steht aber nicht 25, sondern –12. Grummelbrummelbrumm. Aber Potzblitz, wir können ja aus der –12 eine 25 machen, und zwar so:

$$9x^2 + 30x - 12 = 27 \qquad | +37$$
$$9x^2 + 30x + 25 = 64$$

Ist es tatsächlich so einfach? Jep. Nun muss nur noch der linke Teil der Gleichung in einen Klammerausdruck umgewandelt werden und zum Rest lässt sich sagen: Läuft!

$$9x^2 + 30x + 25 = 64$$
$$(3x + 5)^2 = 64$$
$$3x_1 + 5 = 8 \qquad 3x_2 + 5 = -8$$
$$3x_1 = 3 \qquad 3x_2 = -13$$
$$x_1 = 1 \qquad x_2 = -\frac{13}{3}$$

Hurra, jippi, jey. Und genauso läuft es eigentlich immer. ☺

pq-Formel

Die Anwendung der pq-Formel hat den Vorteil, dass man weniger denken muss, dass aber eben die Formel beherrscht werden muss (eine Bürde, von der ich euch ja in einem Anfall von Gnädigkeit für die Klausur befreit habe). Für die Interessierten unter euch (schätzungsweise Massen) habe ich weiter unten einen Beweis der pq-Formel hingeschrieben.
Hier nun eine Schritt-für-Schritt-Anleitung zur Anwendung:

Bevor überhaupt etwas gemacht wird, muss man für zwei Dinge sorgen:

- Vor dem Variablenquadrat (hier also x^2) darf nur noch eine 1 stehen, die man ja bekanntlich weglassen kann
- Auf der gegenüberliegenden Seite der Gleichung (hier rechts) darf nur noch eine 0 stehen.

Führen wir die beiden Schritte aus.

$$9x^2 + 30x - 12 = 27 \qquad |:9$$
$$x^2 + \frac{10}{3}x - \frac{4}{3} = 3 \qquad |-3$$
$$x^2 + \frac{10}{3}x - \frac{13}{3} = 0$$

Wir haben nun eine Gleichung, die der Form

$$x^2 + px + q = 0$$

entspricht. Hier gilt natürlich:

$$p = \frac{10}{3} \qquad \text{und} \qquad q = -\frac{13}{3}$$

Sobald ich eine Gleichung in der besagten Form $x^2+px+q=0$ vorliegen habe – und auch nur dann! – darf ich die fulminante pq-Formel anwenden. Diese lautet:

$$\boxed{x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}}$$

Nun versuchen wir mal, die Gleichung mit der pq-Formel zu lösen:

$$x_{1/2}=-\frac{5}{3}\pm\sqrt{\frac{\left(\frac{10}{3}\right)^2}{4}+\frac{13}{3}}$$

$$x_{1/2}=-\frac{5}{3}\pm\sqrt{\frac{\frac{100}{9}}{4}+\frac{13}{3}}$$

$$x_{1/2}=-\frac{5}{3}\pm\sqrt{\frac{25}{9}+\frac{39}{9}}$$

$$x_{1/2}=-\frac{5}{3}\pm\sqrt{\frac{64}{9}}$$

$$x_{1/2}=-\frac{5}{3}\pm\frac{8}{3}$$

$$x_1=-\frac{5}{3}+\frac{8}{3} \qquad x_2=-\frac{5}{3}-\frac{8}{3}$$

$$x_1=1 \qquad x_2=-\frac{13}{3}$$

Großartig! Die Lösungen sind die gleichen wie oben (wenn es nicht so wäre ... uiuiuiui).

Noch ein Hinweis: Diese Rechnung ist eine Werbung für die Bruchrechnung. Hätte man nämlich unter der Wurzel eine Dezimalzahl gebildet, wäre beim Wurzelziehen möglicherweise eine fürchterlich umständliche Dezimalzahl herausgekommen. Und hier der angedrohte Beweis (wer eine Erklärung will, soll sich bei mir erkundigen):

$$x^2+px+q=0$$

$$x^2+px+\left(\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{2}\right)^2+q=0$$

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{2}\right)^2+q=0$$

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\frac{p^2}{4}-q$$

$$x_{1/2}+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

$$x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

Solche Beweise sind übrigens Hauptinhalt des Mathe-Studiums. Und dieser ist noch recht einfach... Amen.