

Die Ableitungsfunktion

Wozu das jetzt?

Ihr habt gelernt, wie man mithilfe des Differentialquotienten die Steigung einer Kurve an einem Punkt ausrechnet. Dazu benötigt man lediglich zwei Angaben: Die Funktionsgleichung und die Stelle (=Variablenwert) des betreffenden Punktes.

Nun ist dieses Verfahren recht umständlich, wenn man die Steigung an mehreren Punkten einer bestimmten Funktion ausrechnen will. Man muss immer wieder den Differentialquotient benutzen, was mit der Zeit doch ganz schön nervt.

Schöner wäre es also, wenn wir eine Art Funktionsgleichung hätten, in die wir nur noch einen Wert für die Variable einsetzen müssen und dann umgekehrt die Steigung herausbekommen – genauso, wie wir sonst Variablenwerte in Funktionsgleichungen einsetzen, um Funktionswerte zu erhalten.

Der Weg zur Gleichung der Ableitungsfunktion

Das Praktische ist, dass wir hierfür kein neues mathematisches Verfahren lernen müssen. Die Ableitungsfunktion zu finden läuft genauso wie die Steigung an einem bestimmten Punkt zu finden, mit einem kleinen, aber entscheidenden Unterschied.

Nehmen wir uns folgende Funktion vor: $k(u) = -2u^2 + 5$

Wir berechnen die Steigung am Punkt R ($u_R | k(u_R)$)

Nun setzen wir – wie es schon in Aufgabe 3 zur Steigungsberechnung geübt wurde – keine spezielle Zahl für u_r ein, sondern lassen diesen Platzhalter stehen, immer im Bewusstsein, dass er eine feste Zahl repräsentiert!

$$\begin{aligned}
 k'(u_R) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(u_R + h) - k(u_R)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[-2(u_R + h)^2 + 5] - [-2(u_R)^2 + 5]}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[-2(u_R^2 + 2hu_R + h^2) + 5] - [-2u_R^2 + 5]}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[-2u_R^2 - 4hu_R - 2h^2 + 5] + 2u_R^2 - 5}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2u_R^2 - 4hu_R - 2h^2 + 5 + 2u_R^2 - 5}{h}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2u_R^2 + 2u_R^2 - 4hu_R - 2h^2 + 5 - 5}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-4hu_R - 2h^2}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} (-4u_R - 2h) \\
&= \underline{\underline{-4u_R}}
\end{aligned}$$

Wir wissen nun Folgendes: Egal, welche Zahl u_R nun konkret ist, die Steigung, bzw. Ableitung der Funktion an dieser Stelle ist -4 mal diese Zahl!

Wenn u_R also gleich 1 ist, beträgt die Steigung -4 , wenn u_R gleich 5 ist, beträgt die Steigung -20 , wenn u_R gleich -1000 ist, beträgt die Steigung 4000 usw.

Man kann das in einer (natürlich unvollständigen) Wertetabelle ausdrücken:

u_R	1	0	45	$-0,2$	$-12,5$	$0,025$	$\sqrt{2}$	$2,5\pi$	-4
$k'(u_R)$	-4	0	-180	$0,8$	50	$-0,1$	$-4\sqrt{2}$	-10π	16

Der letzte Schritt zur Ableitungsfunktion

Nun können wir einem gegebenen Variablenwert (= Stelle) ohne viel (nur mit ein bisschen) Rechnen einen Wert für die Ableitung zuordnen. Jetzt müssen wir uns nur noch mal erinnern, was Zuordnungen auf mathematisch sind ... *ERINNER* ... *ERINNER* ... *ERINNER* ... *ERINNER* ... TA-DAAAA!!!

Funktionen! Zuordnungen sind nichts anderes als Funktionen! Heißa!

Die Funktionsgleichung zu formulieren, ist nun nicht mehr schwer.

- Vorne schreibt man $k'(u)$ (also der Name der Ursprungsfunktion, gefolgt von einem ' und danach die Funktionsvariable in Klammern) hin.
- In die Mitte kommt ein Gleichheitszeichen.
- Und dahinter das Ergebnis der obigen Rechnung, allerdings ohne das kleine R. Das heißt, dass die Variable wieder als solche hingeschrieben wird, ohne einen speziellen „Vornamen“

Die Funktionsgleichung der Ableitungsfunktion heißt in diesem Falle also:

$$k'(u) = -4u$$

Gelesen: Ka Strich von u gleich minus vier u.