Anleitung zur Berechnung von Ableitungsfunktionen

Prolog

Es gibt nicht **das** Verfahren zur Berechnung der Ableitungsfunktion, genausowenig wie es **das** Verfahren zum Schreiben eines guten Buches oder zum Drehen eines guten Filmes gibt.

Dass es unterschiedliche Ansätze gibt, habt ihr unter Umständen schon bei meinen Tafelanschrieben bemerkt, die ja jedes Mal geringfügig anders wirkten. Hier bekommt ihr aber nun ein Verfahren beschrieben – ich hoffe, möglichst verständlich –, das ihr auf jeden Fall anwenden könnt, z.B. in der Klausur.

Vorbemerkungen zu Missverständnissen

Eine wirklich blöde Sache in der Mathematik ist die Mehrfachverwendung gleicher Schreibweisen und Zeichen. Der Grund dafür ist die Begrenztkeit des Zeichenvorrats im Alphabet und auf Tastaturen.

So kann z.B. die Zeichenfolge

$$z(u + 1)$$

je nach Zusammenhang zwei unterschiedliche Bedeutungen haben:

Einerseits kann sie bedeuten, dass irgendein Element z (z.B. als Platzhalter für eine Zahl) mit $(u + 1)$ multipliziert wird. Dann könnte man ausmultiplizieren:
$z(u + 1) = zu + 1z = zu + z$

Andererseits könnte diese Zeichenfolge bedeuten, dass z eine Funktion ist und $z(u + 1)$ die Abkürzung für den Funktionswert der Funktion z an der Stelle $u + 1$ ist.

Was nun tatsächlich gemeint ist, kann nur aus dem Zusammenhang heraus geschlossen werden. Das ist zwar höchst unbefriedigend, aber es ist leider so. Ich werde versuchen, immer deutlich kenntlich zu machen, was gemeint ist.1

Die Funktion hier

Für das kommende Beispiel ist die Funktion

$k(u) = -2u^2 + 5$

(lies: k von u gleich minus 2 u Quadrat plus 5))

Der Name ist also k, die Variable u. Für die Variable können wir Zahlen einsetzen, und zwar alle reellen (das heißt, grob ausgedrückt, alle, die ihr euch vorstellen könnt). Wir können für die Variable aber auch Platzhalter in Gestalt von Buchstaben oder Buchstabenkombinationen einsetzen, für die wiederum später erst Zahlen eingesetzt werden.

Das Einsetzen von Zahlen oder anderen Ausdrücken für die Variable

Hier kommen nun einige Beispiele, auf welche Weise man Zahlen oder andere Ausdrücke für die Variable u einsetzen kann.

Zuerst setzen wir eine Zahl ein, nämlich 6. Dann müssen wir an jeder Stelle, an der in der Funktionsgleichung ein u steht, die 6 einsetzen:

Aus $k(u) = -2u^2 + 5$ wird so $k(6) = -2 \cdot 6^2 + 5$

Nun setzen wir eine andere Zahl für u ein, nämlich –4:

Aus $k(u) = -2u^2 + 5$ wird so $k(-4) = -2 \cdot (-4)^2 + 5$

In beiden Fällen kann man das, was rechts vom Gleichheitszeichen steht, weiter ausrechnen. Es ist hier ausgeführt:

$k(6) = -2 \cdot 6^2 + 5 = -2 \cdot 36 + 5 = -72 + 5 = -67$
$k(-4) = -2 \cdot (-4)^2 + 5 = -2 \cdot 16 + 5 = -32 + 5 = -27$

Wenn man den Mittelteil, also die rechnerischen Zwischenschritte, weglässt, hat man:
$k(6) = -67$
$k(-4) = -27$

Man sagt dann, der Funktionswert an der Stelle 6 beträgt –67
und der Funktionswert an der Stelle –4 beträgt –27.

Nun muss man aber keine Zahlen für u einsetzen. Man kann auch Buchstaben als Platzhalter für später zu bestimmende Zahlen einsetzen. Das sieht dann so aus:

Zuerst setzen wir d für u ein:

Aus $k(u) = -2u^2 + 5$ wird so $k(d) = -2d^2 + 5$

Ebenso geht auch z.B. P_L

Aus $k(u) = -2u^2 + 5$ wird so $k(P_L) = -2P_L{}^2 + 5$

Rechnen kann man da nun nichts mehr, es bleibt einfach so stehen.

Nun kann man aber auch Kombinationen aus Zahlen und Buchstaben für u einsetzen, z.B. h + 3

Aus $k(u) = -2u^2 + 5$ wird so $k(h + 3) = -2(h + 3)^2 + 5$

Mihilfe der ersten binomischen Formel kann man den letzten Ausdruck etwas weiter ausrechnen:

$$k(h+3) = -2(h+3)^2 + 5 = -2(h^2 + 6h + 9) + 5$$
$$= -2h^2 - 12h - 18 + 5 = -2h^2 - 12h - 13$$

Die **wichtige Erkenntnis** ist nun, das man für Variablen eigentlich alles einsetzen kann, was mathematisch irgendeinen Sinn ergibt.

Genug des Vorgeplänkels, nun zur Sache!

Die Aufgabe

Die Ausgangsaufgabe für das folgende Beispiel möge lauten:

Finde die Ableitungsfunktion zur Funktion

$\mathbf{k(u) = -2u^2 + 5}$

Der Ansatz

Um die Ableitungsfunktion zu berechnen, tun wir zunächst so, als wollten wir die Ableitung an einer bestimmten Stelle berechnen.

Diese Stelle nennen wir (rein willkürlich) $\mathbf{u_R}$.

Die Definition der Ableitung

Wir benötigen nun die Gleichung, durch die die Ableitung an einer bestimmten Stelle überhaupt definiert ist, sozusagen die Rohform der Ableitung. Sie lautet:

$$k'(u_R) = \lim_{h \to 0} \frac{k(u_R + h) - k(u_R)}{h}$$

Es ist zu beachten, dass diese Rohform **für die Funktion k an der Stelle $\mathbf{u_R}$** gilt. Bei anderen Funktionen und anderen Stellen stehen in dieser Definition natürlich andere Buchstaben!

Im Zähler des Bruchs wurde für u einmal $\mathbf{u_R + h}$ eingesetzt (links) und einmal $\mathbf{u_R}$ (rechts). Wir haben also im Zähler links den Funktionswert der Funktion k an der Stelle $\mathbf{u_R + h}$ stehen, abgekürzt durch $\mathbf{k(u_R + h)}$ und rechts den Funktionswert der Funktion k an der Stelle $\mathbf{u_R}$, abgekürzt durch $\mathbf{k(u_R)}$.

Ausrechnen der Funktionswerte im Zähler

Mit den im Moment im Zähler stehenden Abkürzungen kann man rechnerisch gar nichts anfangen. Wir brauchen irgendwelche Terme, mit denen man rechnen kann, um weiterzukommen. Mithilfe der Funktionsgleichung der Funktion k können wir diese Terme ausrechnen. Wir setzen in der Funktionsgleichung einfach das für u ein, was oben in Gleichung in den Klammern hinter dem k steht. Das geht so:

$$k(u_R + h) = -2(u_R + h)^2 + 5 = -2(u_R^2 + 2hu_R + h^2) + 5 = -2u_R^2 - 4hu_R - 2h^2 + 5$$
$$k(u_R) = -2(u_R)^2 + 5 = -2u_R^2 + 5$$

Einsetzen der Funktionswerte in den Zähler

Die Funktionswerte, die wir nun ausgerechnet haben, können wir in die Gleichung der Ableitung einsetzen:

$$k'(u_R) = \lim_{h \to 0} \frac{\left[-2u_R^2 - 4hu_R - 2h^2 + 5\right] - \left[-2u_R^2 + 5\right]}{h}$$

Die erste eckige Klammer steht nur zur Orientierung da, die zweite ist wegen des Minus-Zeichens notwendig.

Auflösen der Klammern im Zähler

Als Nächstes lösen wir die Klammern im Zähler auf. Die erste können wir einfach so weglassen. Die zweite können wir nur dann weglassen, wenn wir alle Vorzeichen in der Klammer umdrehen:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\left[-2u_R^2-4hu_R-2h^2+5\right]-\left[-2u_R^2+5\right]}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{-2u_R^2-4hu_R-2h^2+5+2u_R^2-5}{h}$$

Zusammenschreiben und Verrechnen ähnlicher Elemente im Zähler

Jetzt schreiben wir die Elemente zusammen, die man miteinander verrechnen kann. Also pure Zahlen zu puren Zahlen, Quadrate von Stellen zu Quadraten von Stellen usw. Nachdem wir das getan haben, können wir viele dieser Elemente loswerden:

$$\lim_{h\to 0}\frac{-2u_R^2-4hu_R-2h^2+5+2u_R^2-5}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{-2u_R^2+2u_R^2-4hu_R-2h^2+5-5}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{-4hu_R-2h^2}{h}$$

Ausklammern und Kürzen von h

Ihr habt schon mitbekommen, dass man den Bruch loswerden möchte, indem man h kürzt. Um sicherzugehen, dass man nicht falsch kürzt, kann man h im Zähler ausklammern:

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-4hu_R-2h^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(-4u_R-2h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}(-4u_R-2h)$$

Der Grenzübergang von h

Fast zum Schluss macht man nun das, was das Limes-Zeichen die ganze Zeit schon andeutet: Wir lassen h so miniklein werden, dass es von 0 quasi nicht mehr zu unterscheiden ist. Praktisch lassen wir das Limes-Zeichen weg und setzen für h 0 ein.

$$\lim_{h\to 0}(-4u_R-2h)$$
$$=-4u_R$$

Formulieren der Ableitungsfunktion

Der letzte Schritt ist vermutlich der einfachste.

Um die Gleichung der Ableitungsfunktion zu formulieren, schreiben wir auf die eine Seite des Gleichheitszeichens k'(u), gelesen: k Strich von u, wobei der Strich darauf hinweisen soll, dass es sich um die Ableitungsfunktion von k handelt.

Auf die andere Seite des Gleichheitszeichens kommt das Ergebnis der obigen Rechnung, nur mit dem Unterschied, dass wir nicht mehr u_R hinschreiben, sondern nur noch u, um zu kennzeichnen, dass wir wieder eine Variable haben, für die man alles mathematisch Sinnvolle, in erster Linie Zahlen, einsetzen kann. Die Funktionsgleichung lautet also:

$$\boxed{k'(u) = -4u}$$

Nachwort

So, ich hoffe, dass das ausreichend verständlich war. Besonders am Anfang geht es eigentlich nur darum, für den einen Ausdruck einen anderen, gleichwertigen einzusetzen. Das ist an sich eine recht stupide Sache, aber man muss eben sehr konsequent sein, damit es funktioniert. Sollt5et ihr noch weitere Probleme haben:

Fragt mich bitte!!!