Einfacher ableiten bei ganzrationalen Funktionen

Auf diesem Blatt ist der zentrale Lernstoff eingerahmt, der Rest dient zur unterstützenden Erläuterung.

Kurzer Rückblick: Gestalt von ganzrationalen Funktionstermen

Wie wir ja besprochen haben, lassen sich alle Gleichungen ganzrationaler Funktionen in die folgende Form bringen:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0x^0$$

Wenn man beachtet, das $x^1 = x$ ist und $x^0 = 1$, kann man diese Grundform folgendermaßen verändern:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

Dabei gilt für die Koeffizienten $a_i \in \mathbb{R}$ und für die Exponenten $n \in \mathbb{N}_0$ (womit alle Exponenten neben n selbst auch natürliche Zahlen sind. x ist hier die Variable, für die man normalerweise alle reelle Zahlen einsetzen kann und f ist der Name der Funktion

Man beachte: Die obige Definition legt keineswegs nahe, dass Terme ganzrationaler Funktionen aus mindestens sechs Summanden bestehen müssen. Sie will nur verdeutlichen, wie die Struktur aussieht. Je nach Funktion kann es sein, dass $a_{n-2} = a_1$ ist usw., je nachdem, wie groß n ist.

Die obige Struktur sollte euch vertraut sein. Beispiele für ganzrationale Funktionen, kennt ihr zur Genüge. Zum Verständnis noch ein Beispiel:

$$z(e) = 5e^7 - 0{,}2e + e^6 + 57 - 3e^3$$

Hier ist $n = 7$, außerdem $a_n = a_7 = 5$, $a_{n-1} = a_6 = 1$, $a_{n-4} = a_3 = -3$, $a_{n-6} = a_1 = -0{,}2$, $a_{n-7} = a_0 = 57$. Der Name der Funktion ist z, die Variable ist e.

Ihr habt ja auch schon Terme von ganzrationale Funktionen kennen gelernt, die auf den ersten Blick nicht zu der obigen Form zu passen scheinen, z.B.

$$w(q) = \frac{32(q-2)(q+5)^2}{128}$$

Diese Funktionsgleichung lässt sich aber folgendermaßen umformen:

$$w(q) = \frac{32(q-2)(q+5)^2}{128} = \frac{1(q-2)(q^2+10q+25)}{4} = \frac{q^3+8q^2+5q-50}{4}$$
$$= \frac{q^3}{4} + 2q^2 + \frac{5q}{4} - \frac{50}{4} = \frac{q^3}{4} + 2q^2 + \frac{5q}{4} - \frac{25}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{4}q^3 + 2q^2 + \frac{5}{4}q - \frac{25}{2}}}$$

Dann passt die letzte Form ja wieder sehr fein zu der Definition.
Ganzrationale Funktionsterme schminken sich also manchmal ein wenig, um nicht so ordinär auszusehen, können aber von einem mathematisch versierten Menschen ganz gut entlarvt werden.

Die Ableitung

Ableitungen ganzrationaler Funktionen kann man mit dem Differentialquotienten berechnen. Das ist auch angemessen, denn nur der Differentialquotient selbst *ist die Definition der Ableitung.* Alles andere dient nur zur Vereinfachung.
Glücklicherweise existieren für ganzrationale Funktionen Ableitungsregeln, die das Ableiten wesentlich vereinfachen. Ihr habt sie schon quasi intuitiv auf einem der letzten Arbeitsblätter herausgefunden.
Formal ausgedrückt ist es so:

Wenn die Gleichung einer ganzrationalen Funktion auf folgende Form gebracht wurde

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

lautet die Gleichung der Ableitungsfunktion so:

$$f'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + (n-2)a_{n-2}x^{n-3} + \ldots + 2a_2x + a_1$$

Die Exponenten der einzelnen Glieder aus der Ursprungsfunktion werden also vor den alten Koeffizienten geschrieben, mit diesem multipliziert, bilden so einen neuen Koeffizienten.
Der Exponent, der bei der Variablen steht, wird in jedem Glied um 1 reduziert.

Beispiele für Ableitungsfunktionen finden sich auf einem der letzten Blätter reichlich, darum hier nur ein einziges, dass die Entstehung der Ableitungsgleichung noch einmal verdeutlicht:

$$p(x) = 3x^5 - 0,25x^4 - 20x^2 + 0,3x + 12$$

$$p'(x) = 5\cdot 3x^{5-1} - 4\cdot 0,25x^{4-1} - 2\cdot 20x^{2-1} + 1\cdot 0,3x^{1-1} + 0\cdot 12$$
$$= 15x^4 - 1x^3 - 40x^1 + 0,3x^0 + 0$$
$$= 15x^4 - x^3 - 40x + 0,3$$

Formale Hinweise

Was wir hier auf einen Schlag gemacht haben – und ich denke, es ist auch so verständlich –, ist eigentlich die Zusammenführung dreie Regeln:

- der Potenzregel
- der Summenregel
- der Faktorregel

Diese Regeln sind im Buch auf den Seiten 151 bis 154 genau erklärt und bewiesen. Da es für unsere Zusammenhänge nicht notwendig ist, diese Regeln genauestens zu unterscheiden und getrennt voneinander anzuwenden, möchte ich sie hier nicht weiter einzeln besprechen. Auch was die mathematischen Fähigkeiten betrifft, könnten höchstens die Beweise euch weiterbringen, aber deren Kenntnis ist nicht unbedingt notwendig. Ihr könnte ohnehin schon sehr viel (aber nicht auf den Lorbeeren ausruhen!!!). Die oben genannten Regeln werden auch niemals einzeln abgefragt.

Wichtig und für die Zukunft unabdingbar ist die Fähigkeit, auf die oben vorgeführte Art ganzrationale Funktionen ableiten zu können! Das werden wir noch das ganze übrige Halbjahr machen!

So viel für den Moment, wenn ihr etwas nicht versteht, fragt nach!