Die Suche nach den Extrema und den Wendepunkten

Zur Erinnerung: Worum geht's?

Unser Ziel lautet, die charakteristischen Punkte einer Funktion zu finden und mit deren Hilfe einen Graphen möglichst genau zu skizzieren. Den Kurvenverlauf ganz präzise zu zeichnen, werden wir im Leben nicht hinkriegen (ihr habt ja meine Versuche an der Tafel erlebt, ich kriege ja schon Probleme mit einer Parabel). Aber, was wir durchaus hinkriegen können, ist, die charakteristischen Punkte mithilfe der Funktionsgleichung zu berechnen, sie präzise in ein Koordinatensystem zu zeichnen (und dann zu verbinden). Diese Punkte sind:

- Nullstellen
- Extrema (also Hoch- und Tiefpunkte; die Einzahl des Begriffes lautet übrigens *Extrem*)
- Wendepunkte (zu denen auch die fiesen Sattelpunkte gehören)

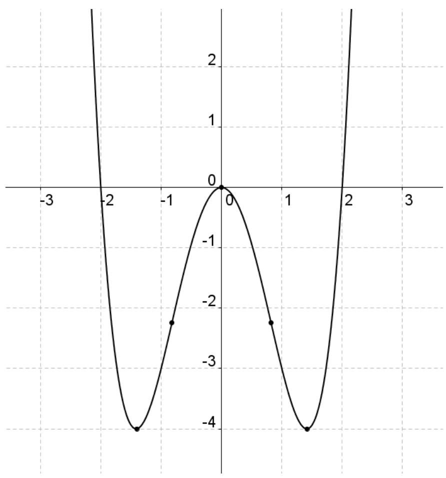
Ferner sind folgende Eigenschaften interessant:

- Symmetrien (durch deren Kenntnis kann man sich u.U. die Hälfte der restlichen Arbeit sparen; wenn z.B. bei einem achsensymmetrischen Graphen bekannt ist, dass er bei (1|3) einen Hochpunkt hat, dann muss man nicht viel nachdenken und weiß gleich, dass er auch bei (-1|3) einen Hochpunkt hat.
- Verhalten eines Funktionsgraphen gegen Unendlich (Umgangssprachlich ausgedrückt: Ob er von oben kommt, nach unten geht usw.)

Beispiel

Wir nehmen an, es sei von einer ganzrationalen Funktion (mit anderen haben wir es zur Zeit nicht zu tun) bekannt, dass ihr Graph achsensymmetrisch ist. Außerdem haben wir schon ausgerechnet, dass bei 2 eine Nullstelle liegt – wir wissen wegen der Achsensymmetrie sofort, dass bei -2 auch eine liegen muss. Außerdem wissen wir, dass bei ($\sqrt{2}$|-4) ein Tiefpunkt liegt (also, wieder wegen der Achsensymmetrie, auch bei ($-\sqrt{2}$|-4)), und dass bei (0|0) ein Hochpunkt liegt. Zuletzt kennen wir noch die Wendepunkte:

$(\sqrt{\frac{2}{3}} \mid \frac{20}{9})$ und $(-\sqrt{\frac{2}{3}} \mid \frac{20}{9})$



Dann können wir diese Punkte jedenfalls in ein Koordinatensystem einzeichnen. Anschließend müssen wir sie noch möglichst geschmeidig mit einer Kurve verbinden und, voila, erhalten wir den Graph, den man rechts bestaunen kann.

Das Verhalten gegen Unendlich haben wir jetzt noch nicht behandelt, nehmt für den Moment einfach mal hin, dass der Graph von oben kommt und auch wieder nach oben geht.

Die krummen Werte oben resultieren einfach daraus, dass bei dieser Art Problem kaum noch möglich ist, Funktionen zu konstruieren, bei denen alles glatt aufgeht.

Verfahren zum Finden von Extrem- und Wendepunkten

Auf den folgenden Seiten sind Graphen von Funktionen, deren Ableitungsfunktionen und wiederum deren Ableitungsfunktionen (der so genannten zweiten Ableitung) zu sehen. Man kann hier recht gut erkennen, welche Werte/Eigenschaften die Ableitungen an den Stellen annehmen, an denen in der Ursprungsfunktion Extrem- und Wendepunkte hat. Vorsicht, nun kommt eine...

Aufgabe

Stelle eine Verbindung zwischen den Extrem- und Wendepunkten der Ursprungsfunktion sowie den ersten beiden Ableitungen an den jeweiligen Stellen her. Leite daraus ein Verfahren ab, wie man Extrem- und Wendestellen finden kann und wie man auch die gemeinen Sattelpunkte identifizieren kann.
Tipps zum Vorgehen:

- Prüfe, welches Verhalten die Ableitungen an den Stellen zeigen, an denen bei der Ursprungsfunktion Extrem- oder Wendepunkte vorkommen.
- Prüfe besonders auch das Verhalten der Ableitungen an Stellen, an denen sich in der Ursprungsfunktion Sattelpunkte befinden und vergleiche dieses Verhalten mit dem Verhalten der Ableitungen an Extrem- und Wendestellen der Ursprungsfunktion.
- Lege z.B. eine kleine Tabelle an.

Hilfreiche Informationen

Extrempunkte

Ihr wisst schon, dass an Extrempunkten die Steigung null beträgt. Das gilt sowohl für Hoch- als auch für Tiefpunkte. Da die erste Ableitung die Steigung der Ursprungsfunktion beschreibt, ergibt sich ein für das Auffinden der Extremstellen sehr attraktiver Zusammenhang...

Wendepunkte

Zu diesen wisst ihr, dass dort die Steigung, bzw. der Abfall normalerweise (Ausnahme siehe unten) maximal sind. Da die erste Ableitung die Steigung der Ursprungsfunktion beschreibt, muss diese an den entsprechenden Stellen wohl ziemlich hoch oder ziemlich tief sein. Hmmm, und Punkte, an denen Funktionswerte sehr hoch oder sehr tief sind, kennen wir doch schon...

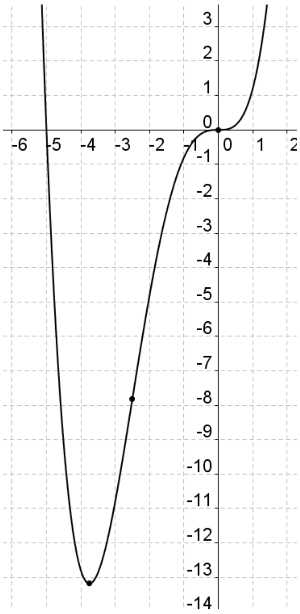
Sattelpunkte

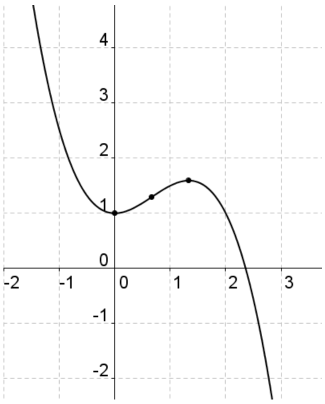
Diese sind fies. An ihnen ist die Steigung null, aber es sind dennoch Wendepunkte und keine Extrempunkte. Es gibt Möglichkeiten, sie rechnerisch von den Extrempunkten zu unterscheiden...

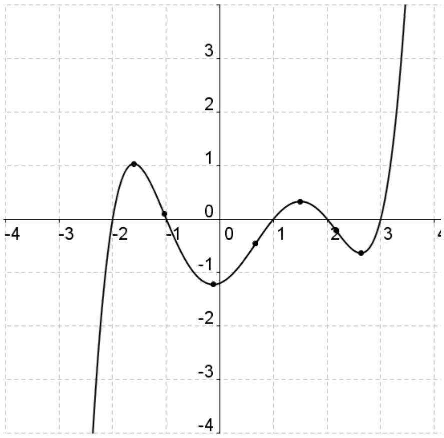
Fröhliches Tüfteln!

Beispielgraphen

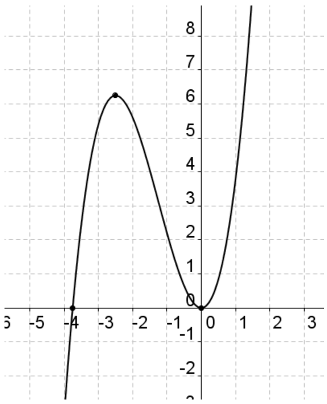
Ursprungsfunktion

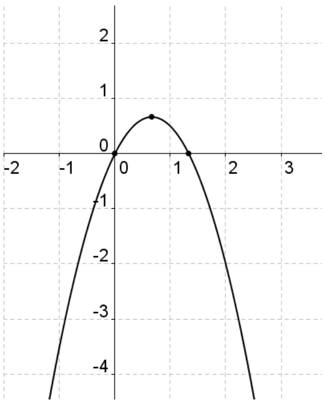


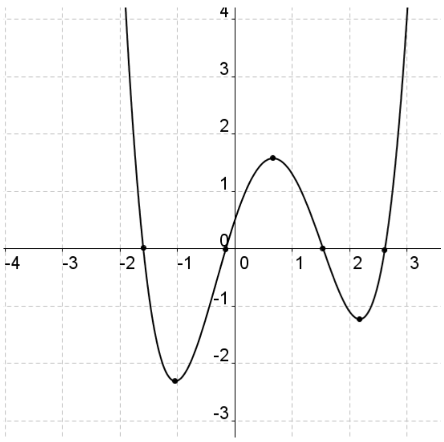




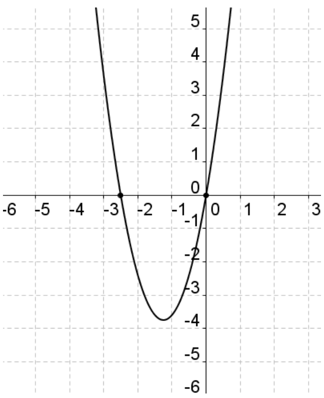
Erste Ableitung

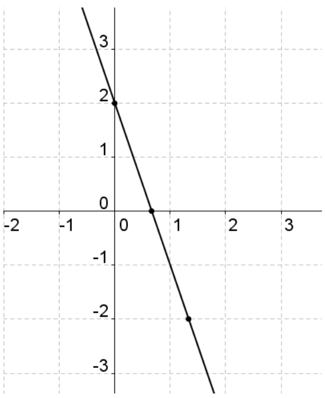


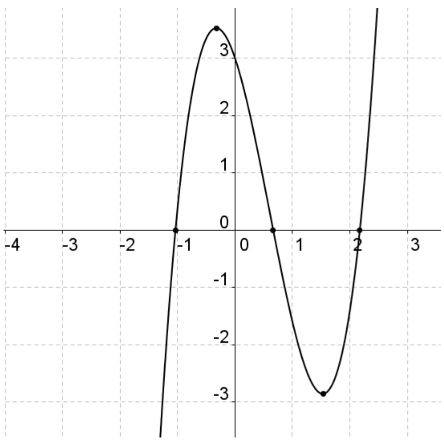




Zweite Ableitung

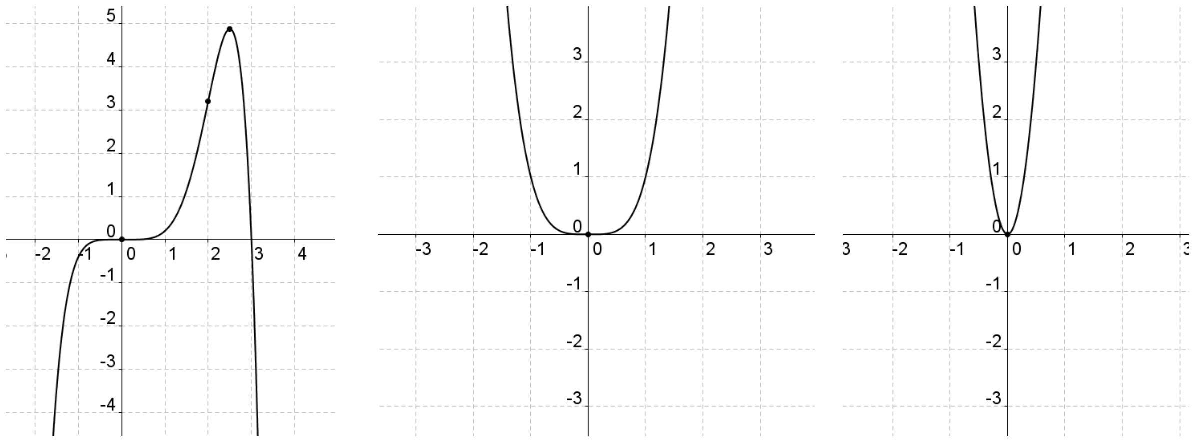




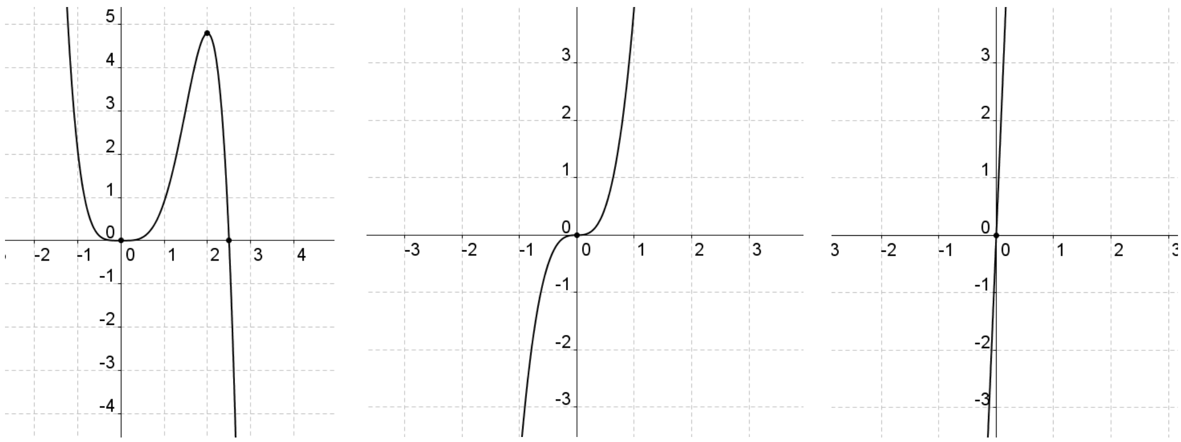


Weitere Beispielgraphen

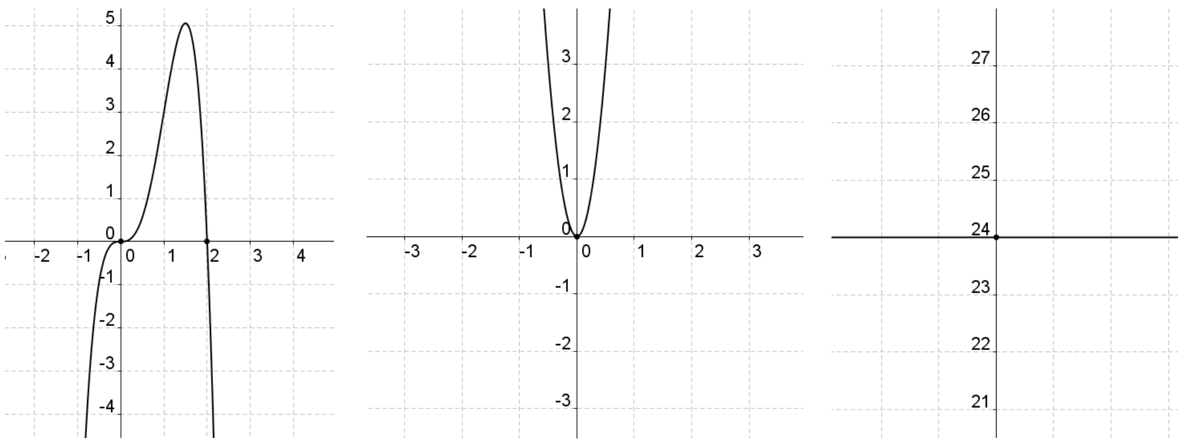
Ursprungsfunktion



Erste Ableitung



Zweite Ableitung



Benutzte Funktionen

$f(x) = 0,2x^4 + x^3$

$g(x) = -0,5\ x^3 + x^2 + 1$

$h(x) = 0,1x^5 - 0,3x^4 - 0,5x^3 + 1,5x^2 + 0,4x - 1,2$

$r(x) = -0,1x^6 + 0,3x^5$

$u(x) = x^4$

$v(x) = 12x^2$