

# So findet man Extrema und Wendepunkte

## Extrema

1. Zunächst die erste und die zweite Ableitung berechnen.
2. Den Funktionsterm der ersten Ableitung gleich Null setzen (**notwendiges Kriterium**) und die Stellen berechnen, für die die erste **Ableitung gleich Null** ist (Nullstellen der ersten Ableitung).
3. Nun hat man drei Alternativen für das **hinreichende Kriterium**:
  - a. Die gefundenen Stellen in die **zweite Ableitung** einsetzen.
    - I. Ist der Funktionswert (der zweiten Ableitung) negativ  
→ Die Ursprungsfunktion hat an der getesteten Stelle einen Hochpunkt.
    - II. Ist der Funktionswert positiv  
→ Die Ursprungsfunktion hat an der getesteten Stelle einen Tiefpunkt.
    - III. Ist er Null  
→ Vielleicht ist dort ein Extrempunkt, vielleicht auch ein Sattelpunkt.  
Man muss in diesem Falle entweder ein anderes Kriterium benutzen (s.u.) oder so lange weitere Ableitungen bilden und die fragliche Stelle in diese Ableitungen einsetzen, bis der Funktionswert einer höheren Ableitung an der fraglichen Stelle ungleich 0 wird.  
Passiert dies zum ersten Mal bei einer *geraden* Ableitung, haben wir einen Extrempunkt. Wie oben beschrieben, haben wir bei positivem Funktionswert einen Tiefpunkt, bei negativem einen Hochpunkt.  
Passiert dies jedoch zum ersten Mal bei einer *ungeraden* Ableitung, haben wir einen Sattel- und damit einen Wendepunkt.
  - b. Man betrachtet umliegende **Funktionswerte**:
    - I. Man berechnet den Funktionswert an der fraglichen Extremstelle.
    - II. Man sucht sich zwei Stellen, die „rechts und links“ von einer fraglichen Stelle, aber – ganz wichtig – nicht „jenseits“ einer anderen möglichen Extremstelle liegen. Wenn man also z.B. als mögliche Extremstellen 1 und 2 hat, und man 1 überprüfen will, kann man „links“ die 0 nehmen, muss aber „rechts“ etwas zwischen 1 und 2 nehmen, z.B. 1,5.
    - III. Dann berechnet man die Funktionswerte der Ursprungsfunktion an diesen Stellen.  
Sind sie beide niedriger als der Funktionswert an der möglichen Extremstelle → Wir haben einen Hochpunkt gefunden.  
Sind sie beide höher als der Funktionswert an der möglichen Extremstelle → Wir haben einen Tiefpunkt gefunden.  
Ist einer höher und einer niedriger als der Funktionswert an der möglichen Extremstelle, haben wir es mit einem Sattelpunkt zu tun
  - c. Man benutzt das **Vorzeichenwechselkriterium**:
    - I. Man sucht sich zwei Stellen, die „rechts und links“ von einer fraglichen Stelle, aber – ganz wichtig – nicht „jenseits“ einer anderen möglichen Extremstelle liegen (s.o.).
    - II. Dann berechnet man die Steigung (also die Funktionswerte der ersten Ableitung) an diesen beiden Stellen.
    - III. Haben sie das gleiche Vorzeichen → Sattelpunkt (und damit auch Wendepunkt).  
Ist die Steigung „links“ positiv und „rechts“ negativ → HP.  
Ist die Steigung „links“ negativ und „rechts“ positiv → TP.
4. Nachdem man weiß, um welche Art Punkt es sich handelt, rechnet man die Funktionswerte an den betreffenden Stellen aus und bekommt so die gesuchten Punkte (= Pärchen aus Stelle und Funktionswert).
5. Diese Punkte kann man nun in ein Koordinatensystem einzeichnen.

## Wendepunkte

---

**Vorabhinweis:** Die Suche nach Wendestellen ist nichts anderes als die Suche nach Extremstellen der ersten Ableitung. Darum ähneln sich die Verfahren doch sehr.

1. Zunächst die zweite und die dritte Ableitung berechnen.
2. Den Funktionsterm der zweiten Ableitung gleich Null setzen (**notwendiges Kriterium**) und die Stellen berechnen, für die die zweite **Ableitung gleich Null** ist (Nullstellen der zweiten Ableitung).
3. Nun hat man drei Alternativen für das **hinreichende Kriterium**:
  - a. Die gefundenen Stellen in die **dritte Ableitung** einsetzen.
    - I. Ist der Funktionswert (der dritten Ableitung) ungleich 0  
→ Die Ursprungsfunktion hat an der getesteten Stelle einen Wendepunkt.
    - II. Ist er Null  
→ Vielleicht ist dort ein Wendepunkt, vielleicht auch nicht.  
Man muss in diesem Falle entweder ein anderes Kriterium benutzen (s.u.) oder so lange weitere Ableitungen bilden und die fragliche Stelle in diese Ableitungen einsetzen, bis der Funktionswert einer höheren Ableitung an der fraglichen Stelle ungleich 0 wird.  
Passiert dies zum ersten Mal bei einer *ungeraden* Ableitung, haben wir einen Wendepunkt.  
Passiert dies jedoch zum ersten Mal bei einer *geraden* Ableitung, haben wir keinen Wendepunkt.
  - b. Man betrachtet umliegende **Funktionswerte der ersten Ableitung** (also Steigungswerte):
    - I. Man berechnet den Funktionswert der ersten Ableitung an der fraglichen Wendestelle der Ursprungsfunktion.
    - II. Man sucht sich zwei Stellen, die „rechts und links“ von einer fraglichen Stelle, aber – ganz wichtig – nicht „jenseits“ einer anderen möglichen Wendestelle liegen. Wenn man also z.B. als mögliche Wendestellen 1 und 2 hat, und man 1 überprüfen will, kann man „links“ die 0 nehmen, muss aber „rechts“ etwas zwischen 1 und 2 nehmen, z.B. 1,5.
    - III. Dann berechnet man die Funktionswerte der ersten Ableitung an diesen Stellen. Sind sie beide niedriger oder beide höher als der Funktionswert an der möglichen Wendestelle → Wir haben eine Wendestelle gefunden.  
Ist einer höher und einer niedriger als der Funktionswert an der möglichen Extremstelle, haben wir es mit keiner Wendestelle (sondern z.B. mit einer Extremstelle) zu tun
  - c. Man benutzt das **Vorzeichenwechselkriterium**:
    - I. Man sucht sich zwei Stellen, die „rechts und links“ von einer fraglichen Stelle, aber – ganz wichtig – nicht „jenseits“ einer anderen möglichen Wendestelle liegen (s.o.).
    - II. Dann berechnet man die Funktionswerte der zweiten Ableitung an diesen beiden Stellen.
    - III. Haben sie das gleiche Vorzeichen → keine Wendestelle.  
Ist die Steigung „links“ positiv und „rechts“ negativ oder „links“ negativ und „rechts“ positiv → Wendestelle gefunden.
4. Nachdem man weiß, um welche Art Punkt es sich handelt, rechnet man (sofern noch nicht geschehen) die Funktionswerte an den betreffenden Stellen aus und bekommt so die gesuchten Punkte (=Pärchen aus Stelle und Funktionswert).
5. Diese Punkte kann man nun in ein Koordinatensystem einzeichnen.