Erläuterungen zu den hinreichenden Kriterien b und c

Voraussetzungen

Wir benutzen im Folgenden als Beispiel wieder die Funktion, die ich schon im Unterricht als Beispiel vorgeführt habe. Die Ableitungen und die möglichen Extremstellen haben wir im Unterricht schon berechnet, deshalb gebe ich sie hier einfach an:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{2}x^3 + 1$$

$$f'(x) = 2x^3 - \frac{9}{2}x^2 \qquad x_{E1} = 0$$

$$f''(x) = 6x^2 - 9x \qquad x_{E2} = \frac{9}{4}$$

Für diese beiden Kriterien brauchen wir maximal die zweite Ableitung, darum sind die anderen nicht angegeben.

Argumentation über Funktionswerte

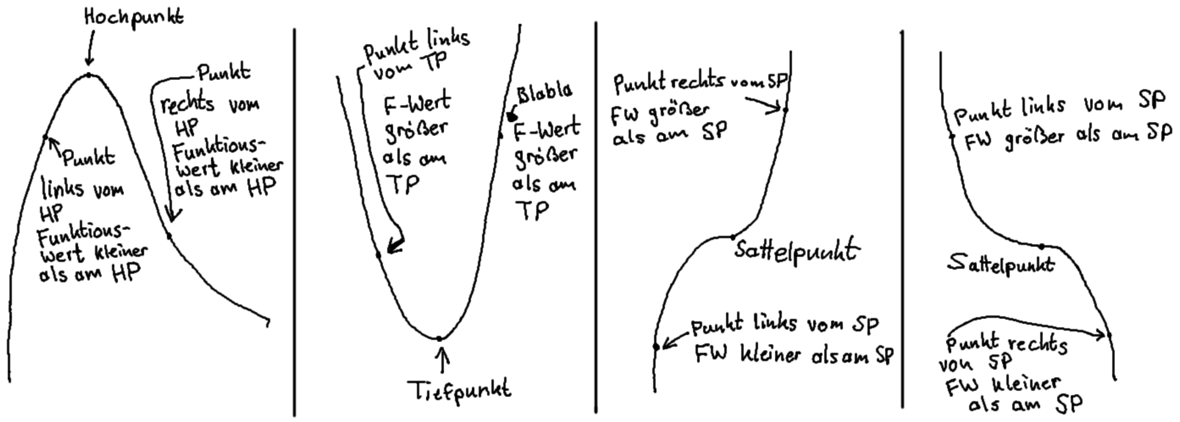
Grundlegende Erkenntnis: Punkte die sich nahe bei Extrempunkten befinden, haben stets …

- kleinere Funktionswerte als der Extrempunkt, wenn es sich um einen Hochpunkt handelt
- höhere Funktionswerte als der Extrempunkt, wenn es sich um einen Tiefpunkt handelt

Diese Erkenntnis wird für dieses hinreichende Kriterium benutzt:

- Wenn zwei Punkte „links“ (also mit kleinerer Stelle als der mögliche Extrempunkt) und „rechts“ (also mit größerer Stelle als der mögliche Extrempunkt) beide **kleinere** Funktionswerte haben als der mögliche Extrempunkt selbst, handelt es sich bei dem möglichen Extrempunkt tatsächlich um einen, und zwar um einen **Hochpunkt.**
- Wenn zwei Punkte „links“ (also mit kleinerer Stelle als der mögliche Extrempunkt) und „rechts“ (also mit größerer Stelle als der mögliche Extrempunkt) beide **größere** Funktionswerte haben als der mögliche Extrempunkt selbst, handelt es sich bei dem möglichen Extrempunkt tatsächlich um einen, und zwar um einen **Tiefpunkt**.
- Wenn von zwei Punkten, von denen einer „links“ (also mit kleinerer Stelle als der mögliche Extrempunkt) und einer „rechts“ (also mit größerer Stelle als der mögliche Extrempunkt) vom möglichen Extrempunkt liegt, der eine einen **kleineren** und der andere einen **größeren** Funktionswert hat als der mögliche Extrempunkt selbst, handelt es sich bei dem möglichen Extrempunkt in Wirklichkeit um einen **Sattelpunkt.**

Hier eine erhellende Skizze:



Es ist zu beachten, dass die Stellen, die wir zur Überprüfung benutzen, nicht so weit entfernt liegen dürfen, dass sie sozusagen „jenseits“ einer anderen möglichen Extremstelle liegen. Hat man mehrere mögliche Extremstellen, müssen die „Überprüfungsstellen“ stets zwischen den möglichen Extremstellen liegen.

Und hier das Beispiel zur oben genannten Funktion:

Wir betrachten zuerst $x_{E1} = 0$

Erlaubte Überprüfungsstellen sind $x_{Ü1} = -1$ und $x_{Ü2} = 1$ (3 ginge z.B. nicht, da diese Stelle jenseits der anderen möglichen Extremstelle liegt).

Es gilt (die Rechnungen möge jeder selbst ausführen):

$$f(x_{Ü1}) = f(-1) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + 1 = 3$$

$$f(x_{E1}) = f(0) = 1 \qquad \text{also:} \qquad f(x_{Ü1}) = 3 > f(x_{E1}) = 1 > f(x_{Ü2}) = 0$$

$$f(x_{Ü2}) = f(1) = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} + 1 = 0$$

Gemäß den Ausführungen oben, haben wir einen **Sattelpunkt** mit den Koordinaten (0|1)

Jetzt betrachten wir $x_{E2} = \frac{9}{4}$

Erlaubte Überprüfungsstellen sind $x_{Ü2} = 1$ (von eben, können wir noch mal benutzen) und $x_{Ü3} = 10$.

Es gilt (die Rechnungen möge jeder selbst ausführen):

$f(x_{Ü2}) = f(1) = 0$

$f(x_{E2}) = f(\frac{9}{4}) = -3{,}271484375$ also: $f(x_{Ü2}) > f(x_{E2}) < f(x_{Ü3})$

$f(x_{Ü3}) = f(10) = 5000 - 1500 + 1 = 3501$

Gemäß den Ausführungen oben, haben wir einen **Tiefpunkt** mit den Koordinaten (2,25|-3,271484375).

Vorzeichenwechselkriterium

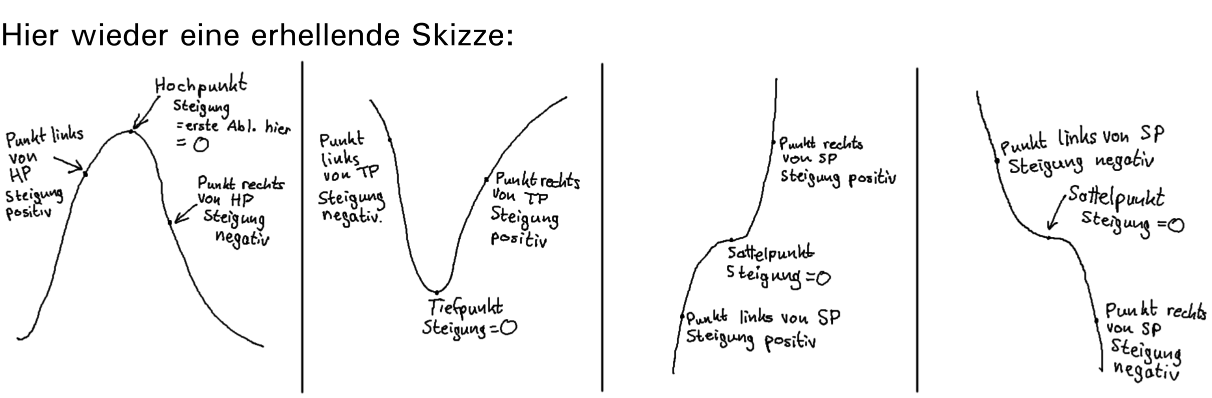
Grundlegende Erkenntnis:

- Vor Hochpunkten ist die Steigung positiv, danach negativ.
- Vor Tiefpunkten ist die Steigung negativ, danach positiv.
- Vor Sattelpunkten ist die Steigung genauso (positiv oder negativ) wie danach.

Diese Erkenntnis wird für das hinreichende Vorzeichenwechselkriterium benutzt:

- Wenn an einer Stelle links von einer möglichen Extremstelle die erste Ableitung einen positiven Funktionswert hat und an einer Stelle rechts von derselben möglichen Extremstelle die erste Ableitung einen negativen Funktionswert hat, dann haben wir die Stelle eines **Hochpunktes** gefunden.
- Wenn an einer Stelle links von einer möglichen Extremstelle die erste Ableitung einen negativen Funktionswert hat und an einer Stelle rechts von derselben möglichen Extremstelle die erste Ableitung einen positiven Funktionswert hat, dann haben wir die Stelle eines **Tiefpunktes** gefunden.
- Wenn die erste Ableitung links und rechts von der möglichen Extremstelle dasselbe Vorzeichen hat, also entweder beide male positiv oder negativ ist, haben wir die Stelle eines **Sattelpunktes** gefunden.

Hier wieder eine erhellende Skizze:



Es ist wieder zu beachten, dass die Stellen, die wir zur Überprüfung benutzen, nicht soweit entfernt liegen dürfen, dass sie sozusagen „jenseits“ einer anderen möglichen Extremstelle liegen. Hat man mehrere mögliche Extremstellen, müssen die „Überprüfungsstellen“ stets zwischen den möglichen Extremstellen liegen.

Auch hierfür das Beispiel mit der obigen Funktion

Wir betrachten zuerst $x_{E1} = 0$

Erlaubte Überprüfungsstellen sind wieder $x_{Ü1} = -1$ und $x_{Ü2} = 1$ (3 ginge z.B. nicht, da diese Stelle jenseits der anderen möglichen Extremstelle liegt).

Es gilt (die Rechnungen möge jeder selbst ausführen):

$$f'(x_{Ü1}) = f(-1) = -2 - \frac{9}{2} = -6,5$$

$$f'(x_{Ü2}) = f(1) = 2 - \frac{9}{2} = -2,5$$

Also ist die Steigung sowohl vor als auch nach der möglichen Extremstelle negativ. Gemäß den Ausführungen oben, haben wir einen **Sattelpunkt,** dessen Funktionswert wir mit diesem Verfahren noch extra ausrechnen müssten, um einen Punkt aus Stelle und Funktionswert zu erhalten.

Jetzt betrachten wir $x_{E2} = \frac{9}{4}$

Erlaubte Überprüfungsstellen sind wieder $x_{Ü2} = 1$ (von eben, können wir noch mal benutzen) und $x_{Ü3} = 10$.

Es gilt (die Rechnungen möge jeder selbst ausführen):

$$f'(x_{Ü2}) = f'(1) = -2,5$$

$$f'(x_{Ü3}) = f'(10) = 2000 - 450 = 1550$$

Also ist die Steigung sowohl vor der möglichen Extremstelle negativ, danach positiv. Gemäß den Ausführungen oben, haben wir einen **Tiefpunkt,** dessen Funktionswert wir mit diesem Verfahren noch extra ausrechnen müssten, um einen Punkt aus Stelle und Funktionswert zu erhalten.

Hier zur Veranschaulichung der Graph der Funktion mit den bisher berechneten Punkten: