# Lösungen zu S. 213, Ü. 2 und 3

## Übung 2

### *Vorbereitende Überlegungen*

So, es geht also um die Fläche eines Rechtecks. Mal kurz im Gedächtnis kramen, wie man die Rechtecksfläche berechnet ... ah ja, eine Seite mal andere Seite. Für das vorliegende Rechteck heißt das also:

$$F = x \cdot y$$

So, und da diese Fläche ja besonders groß werden soll, ahnen wir mit unserem hyperscharfen Verstand schon, dass wir die Gleichung oben für die Zielfunktion brauchen.

Dann brauchen wir nur noch einen Weg, eine der blöden Variablen aus der Gleichung zu schmeißen. Also x durch y ausdrücken ... oder andersrum? Benutzen kann und muss man die Tatsache, das der Punkt mit den Koordinaten $(x|y)$ auf der Parabel mit der Funktionsgleichung $f(x) = 3 - x^2$ liegt. Da y in diesem Falle den Funktionswert zu x darstellt und der Funktionswert von x einfach an der rechten Seite der Funktionsgleichung abgelesen werden kann, können wir sagen:

$$y = 3 - x^2$$

Wundervoll! Wir haben nun also...

**Hauptbedingung:** $F = x \cdot y$

**Nebenbedingung:** $y = 3 - x^2$

Und daraus basteln wir, indem wir y durch die rechte Seite der Nebenbedingungs-Gleichung ersetzen, die...

**Zielfunktion**

$$F(x) = x \cdot (3 - x^2) = 3x - x^3$$

## *Schlaue Berechnungen*

Da wir ja die Fläche maximal haben wollen, brauchen wir das Maximum, also den Hochpunkt der Zielfunktion. Um diesen herauszufinden, stellen wir erstmal die ersten beiden Ableitungen auf:

$$F(x) = 3x - x^3$$
$$F'(x) = 3 - 3x^2$$
$$F''(x) = -6x$$

Um nun *mögliche* Extremstellen herauszufinden, brauchen wir das notwendige Kriterium dafür und setzen also die erste Ableitung gleich Null:

$$0 = 3 - 3x^2$$
$$0 = 1 - x^2$$
$$x^2 = 1$$
$$x = \pm 1$$

Das war ja jetzt fürchterlich schwer. Nun können wir uns also überlegen, ob die positive oder die negative 1 sinnvoll ist … hmmm, Rechtecke mit negativen Seitenlängen? Nein, nein, nein. Also bleiben wir bei der positiven 1 und überprüfen, ob an dieser Stelle ein Maximum vorliegt, indem wir die 1 in die zweite Ableitung einsetzen:

$$F''(1) = -6 \cdot 1 = -6$$

−6 ist negativ, also hat die Ursprungsfunktion an der Stelle 1 einen Maximum. Nun brauchen wir noch y:

$$y = 3 - x^2 = 3 - 1^2 = 3 - 1 = 2$$

## *Das Ergebnis*

Wir wissen jetzt, wie das Rechteck aussehen muss. Die gesuchten Maße sind:

$$\boxed{x = 1} \quad \boxed{y = 2}$$

Und die Fläche beträgt dann natürlich 2.

Aloha, wir hoffen, Sie wurden angemessen unterhalten.

# Übung 3

### *Vorbereitende Überlegungen*

Diesmal geht es also um die Querschnittsfläche eines Tunnels. Wichtig ist dabei das Wort Fläche! ☺ Diese setzt sich aus der Fläche des Rechtecks (unten) und des Halbkreises (oben) zusammen.

Die Rechtecksfläche beträgt: $F_R = h \cdot 2r = 2hr$

Die Halbkreisfläche beträgt (guckt mal nach, wie man die Fläche eines ganzen Kreises ausrechnet): $F_{HK} = \frac{\pi}{2}r^2$

Die Gesamtfläche beträgt also: $F_{ges} = 2hr + \frac{\pi}{2}r^2$

Es ist ja wieder diese Fläche, die gigantisch werden soll, also brauchen wir sie für die Zielfunktion.

Jetzt kommt wieder das lustige Spiel „Wir ersetzen eine Variable durch einen Ausdruck, in dem nur noch die andere vorkommt". Und dazu nehmen wir die Information zur Hand, dass der Umfang 20m sein soll. Der Umfang setzt sich zusammen aus zweimal die Rechteckshöhe, also 2h, und dem Umfang des Halbkreises, der $\pi r$ beträgt. Der Gesamtumfang ist also

$$U = 2h + \pi r$$

Wir wissen, dass $U = 20$ ist…

$$20 = 2h + \pi r$$

$$20 - \pi r = 2h$$

Grandios! Wir haben wieder…

**Hauptbedingung:** $F_{ges} = 2hr + \frac{\pi}{2}r^2$

**Nebenbedingung:** $2h = 20 - \pi r$

(Die 2h hab ich stehen lassen, weil man es dann gleich leichter einsetzen kann.)

### Zielfunktion

$$F_{ges}(r) = 2hr + \frac{\pi}{2}r^2 = (20 - \pi r)r + \frac{\pi}{2}r^2 = 20r - \pi r^2 + \frac{\pi}{2}r^2$$

$$= 20r - \frac{\pi}{2}r^2$$

## *Fröhliche Berechnungen*

Das Geschwätz wegen Hochpunkt, Ableitungen und so, steht schon bei Übung 2. Hier läuft es genauso.

$$F(r) = 20r - \frac{\pi}{2}r^2$$
$$F'(r) = 20 - \pi r$$
$$F''(r) = -\pi$$

Erste Ableitung gleich Null setzen:

$$0 = 20 - \pi r$$
$$\pi r = 20$$
$$r = \frac{20}{\pi}$$

Diesen Bruch wandeln wir um Gottes Willen nicht in eine endlos lange Dezimalzahl um (ihr seht gleich, wieso).

Da die zweite Ableitung immer negativ ist, wissen wir jetzt schon, dass wir die Stelle eines Hochpunktes haben.

Jetzt müssen wir nur noch h ausrechnen:

$$2h = 20 - \pi r \Rightarrow h = 10 - \frac{\pi}{2}r = 10 - \frac{\pi}{2} \cdot \frac{20}{\pi} = 10 - 10 = 0$$

h, also die Höhe des Rechtecks unten, ist also Null und der Tunnel Halbkreisförmig. Klingt komisch, ist aber so.

## *Das Ergebnis*

Wir wissen jetzt, wie der merkwürdige Tunnel aussehen muss. Die gesuchten Maße sind:

$$\boxed{r = \frac{20}{\pi}} \quad \boxed{h = 0}$$

Querschnittsfläche: $F_{ges} = 2hr + \frac{\pi}{2}r^2 = 0 + \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{20}{\pi}\right)^2 = \frac{400\pi}{2\pi^2} = \frac{200}{\pi} \approx 63{,}661977$

Umfang: $U = 2h + \pi r = 0 + \pi\frac{20}{\pi} = \frac{20\pi}{\pi} = 20$

Das scheinbar merkwürdige Ergebnis resultiert daraus, dass es bei vorgegebenem Umfang und freier Formenwahl immer am besten ist, eine kreisförmige Form zu wählen, wenn man einen möglichst große Fläche haben will. Wollen wir das dem Bauer aus Lenas Präsentation sagen?