Beispiel einer vollständigen Funktions-untersuchung/Kurvendiskussion

Zur Erinnerung: Die Bestandteile

- Symmetrie
- Verhalten gegen Unendlich
- Nullstellen und Schnittpunkt mit der zweiten Achse **(neu!)**
- Extrempunkte
- Wendepunkte
- Graph

Schritte

1. Ableitungen ausrechnen und listenartig aufschreiben
2. Symmetrieverhalten untersuchen
3. Verhalten gegen Unendlich untersuchen
4. Schnittpunkt mit y-Achse berechnen **(neu!)**
5. Nullstellen berechnen
6. Mögliche Extremstellen berechnen, überprüfen, Extrempunkte berechnen.
7. Mögliche Wendestellen berechnen, überprüfen, Wendepunkte berechnen.
8. Auf Basis der ermittelten Ergebnisse Graph skizzieren.

Durchführung

Wir gehen genau nach der oben eingeführten Reihenfolge vor. Zusätzliche Kommentare spare ich mir hier mal, damit ihr sehen könnt, worauf es in der Klausur ankommt. Die Schreibweisen und die Formalia sind hier alle, wie ich sie auch von euch in der Klausur erwarte.

Es geht um die Funktion mit der Gleichung $\boxed{T(k) = -\frac{k^5}{5} + k^3 + 2{,}5k}$ (vom AB)

1. Ableitungen

$$T'(k) = -k^4 + 3k^2 + 2{,}5$$
$$T''(k) = -4k^3 + 6k$$
$$T'''(k) = -12k^2 + 6$$
$$T''''(k) = -24k$$
$$T'''''(k) = -24$$
$$T''''''(k) = 0$$

Aller weiteren Ableitungen sind natürlich auch gleich Null.

2. Symmetrie

Im Funktionsterm kommen ausschließlich ungerade Exponenten bei der Variable vor (5; 3; 1). Ganzrationale Funktionen, bei denen dies der Fall ist, sind stets **punktsymmetrisch zum Ursprung.**

Bei den weiteren Rechnungen hilft uns das sehr, da wir uns damit fast die Hälfte aller Rechnungen sparen.

3. Verhalten gegen Unendlich

Wir müssen lediglich beobachten, wie sich $-k^5$ für betragsgroße Zahlen verhält, da alle anderen Glieder der Gleichung sowie der Koeffizient dieses Glieds für das Verhalten gegen Unendlich vollkommen irrelevant sind.

Nach etwas Überlegen finden wir heraus:

$$\lim_{k\to\infty} T(k) = -\infty$$
$$\lim_{k\to-\infty} T(k) = \infty$$

Aufgrund der Punktsymmetrie muss man beim zweiten Grenzwert gar nichts mehr rechnen, sondern man weiß automatisch, dass er sich genau anders als der erste verhalten muss.

4. Schnittpunkt mit der y-Achse

Einfach 0 für k einsetzen: $T(0) = -\frac{0^5}{5} + 0^3 + 2,5 \cdot 0 = 0$

Der Schnittpunkt ist also der Ursprung $(0|0)$

Das gilt übrigens für alle Funktionen, die punktsymmetrisch zum Ursprung sind (guckida, wozu diese Symmetrie alles gut ist).

5. Nullstellen

$$T(k) = 0$$
$$-\frac{k^5}{5} + k^3 + 2,5k = 0$$
$$k\left(-\frac{k^4}{5} + k^2 + 2,5\right) = 0$$
$$\Rightarrow k_{N1} = 0$$
$$-\frac{k^4}{5} + k^2 + 2,5 = 0 \qquad |\cdot(-5)$$
$$k^4 - 5k^2 - 12,5 = 0$$
$$\text{Substitution: } k^2 = z$$
$$z^2 - 5z - 12,5 = 0$$

$PQ-Formel:$

$$z_{1/2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} + 12,5}$$

$$z_{1/2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{50}{4}}$$

$$z_{1/2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{75}{4}}$$

$$z_{1/2} = \frac{5}{2} \pm \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

$$z_1 = \frac{5}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2} = \frac{5+5\sqrt{3}}{2} = \frac{5(1+\sqrt{3})}{2} \approx 6,83012701892219323381861585376 47$$

$z_2 = \frac{5}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{2}$ wird negativ, können wir in Blick auf die Resubstitution vergessen.

Resubstitution: $k = \pm\sqrt{z_1} = \pm\sqrt{\frac{5(1+\sqrt{3})}{2}} \approx \pm 2,6134511701813357648816781210684$

Wir haben also drei Nullstellen:

$$\boxed{\begin{aligned} k_{n1} &= -2,6134511701813357648816781210684 \\ k_{n2} &= 0 \\ k_{n3} &= 2,6134511701813357648816781210684 \end{aligned}}$$

Ich habe die Nummerierung gegenüber der fünftletzten Zeile auf der vorigen Seite geändert, um der Reihenfolge der Nullstellen Rechnung zu tragen.

Das „rechts“ und „links“ vom Ursprung beim betragsmäßig gleichen Wert Nullstellen liegen müssen, ergibt sich auch wieder aus der Symmetrie.

6. Extremstellen

Notwendiges Kriterium:

$$T'(k) = 0$$

$$-k^4 + 3k^2 + 2,5 = 0 \qquad |\cdot(-1)$$

$$k^4 - 3k^2 - 2,5 = 0$$

$$\text{Substitution: } k^2 = w$$

$$w^2 - 3w - 2,5 = 0$$

$$PQ-Formel:$$

$$w_{1/2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{10}{4}}$$

$$w_{1/2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{19}{4}}$$

$$w_{1/2} = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{19}}{2}$$

$$w_1 = \frac{3+\sqrt{19}}{2} \approx 3,67944947177033677611849099 19298$$

$w_2 = \dfrac{3-\sqrt{19}}{2}$ ist jedenfalls negativ, darum in Blick auf die Resubstitution zu vergessen.

$$k = \pm\sqrt{\frac{3+\sqrt{19}}{2}} \approx \pm 1,9181891126190704078335011480543$$

Wir haben also zwei mögliche Extremstellen:

$$\boxed{\begin{array}{l} k_{e1} = -\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{19}}{2}} \approx -1,9181891126190704078335011480543 \\ k_{e2} = \sqrt{\dfrac{3+\sqrt{19}}{2}} \approx 1,9181891126190704078335011480543 \end{array}}$$

Bei der Überprüfung mit einem hinreichenden Kriterium machen wir uns die Symmetrie am Ursprung zunutze. Wenn nämlich rechts vom Ursprung z.B. ein Hochpunkt ist, muss links vom Ursprung ein Tiefpunkt sein usw. Macht euch das mal am Graphen klar.

Wir überprüfen also lediglich eine mögliche Extremstelle, aus Bequemlichkeit die positive; und zwar anhand höherer Ableitungen.

$$\begin{aligned} &T''(k_{e1}) = T''\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{19}}{2}}\right) \approx T''(1,918189) \\ &= T''(1,918189) \\ &= -4 \cdot 1,918189^3 + 6 \cdot 1,918189 \\ &= -28,231514696213541076 + 11,509134 \\ &= -16,722380696213541076 \end{aligned}$$

Das ist eine negative Zahl, darum ist die getestete Stelle die Stelle eines Hochpunktes – und die andere mögliche Extremstelle die Stelle eines Tiefpunktes!

Nun brauchen wir noch den Funktionswert dazu. Wir rechnen wieder nur einen aus, der andere ergibt sich wegen der Symmetrie automatisch.

Bitte auf nächste Seite blättern.

$$T(k_{e1}) = T\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{19}}{2}}\right) \approx T(1{,}918189)$$
$$= -\frac{1{,}918189^5}{5} + 1{,}918189^3 + 2{,}5 \cdot 1{,}918189$$
$$\approx 6{,}6595302$$

Nach dieser Rechnung können wir die beiden Extrempunkte benennen:

$$\boxed{\begin{array}{l} TP(-1{,}918189 \mid -6{,}6595302) \\ HP(1{,}918189 \mid 6{,}6595302) \end{array}}$$

7. Wendepunkte

Notwendiges Kriterium:

$$T''(k) = 0$$
$$-4k^3 + 6k = 0$$
$$-2k(2k^2 - 3) = 0$$
$$\Rightarrow k_{W1} = 0$$
$$2k^2 - 3 = 0$$
$$2k^2 = 3$$
$$k^2 = \frac{3}{2}$$
$$k = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$$

Daraus ergeben sich drei mögliche Wendestellen (wieder mit kleiner Umbenennung):

$$\boxed{\begin{array}{l} k_{w1} = -\sqrt{\frac{3}{2}} \approx -1{,}2247448713915890490986420373529 \\ k_{w2} = 0 \\ k_{w3} = \sqrt{\frac{3}{2}} \approx 1{,}2247448713915890490986420373529 \end{array}}$$

Wir müssen wegen der Symmetrie nur zwei dieser Stellen überprüfen. Auf jeden Fall die 0, weil diese genau auf dem Symmetriepunkt liegt, außerdem nehmen wir wieder die positive Stelle.

$$T'''(0) = -12 \cdot 0^2 + 6 = 6$$

Das ist jedenfalls nicht Null, also haben wir eine Wendestelle gefunden.

$$T'''\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = -12\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 + 6 = -12\cdot\frac{3}{2} + 6 = -\frac{36}{2} + 6 = -18 + 6 = -12$$

Das ist auch ungleich Null, also haben wir dort (und auch wegen der Symmetrie an der übrigen Stelle!) eine Wendestelle gefunden. Zu den drei Wendestellen müssen wir nun noch die Funktionswerte berechnen, um die Wendepunkte angeben zu können. Das müssen wir aber wegen der Symmetrie (geil, wozu Symmetrie gut ist) nur für eine der Stellen machen. Wieder die positive.

$$\begin{aligned}
&T(k_{w1}) = T\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) \approx T(1{,}224745)\\
&= -\frac{1{,}224745^5}{5} + 1{,}224745^3 + 2{,}5\cdot 1{,}224745\\
&\approx 4{,}347845
\end{aligned}$$

Damit haben wir drei Wendepunkte:

$$\boxed{\begin{array}{l} WP_1(-1{,}224745 \mid -4{,}347845)\\ WP_2(0 \mid 0)\\ WP_3(1{,}224745 \mid 4{,}347845)\end{array}}$$

Diese liegen direkt nebeneinander, was zwar ungewöhnlich scheint, aber völlig unproblematisch ist.

Mit all diesen Informationen können wir nun einen Graph skizzieren. Der befindet sich auf der nächsten Seite. Ich Schlingel hab das natürlich auch mit GeoGebra und meinem Funktionsmanipulator gemacht.

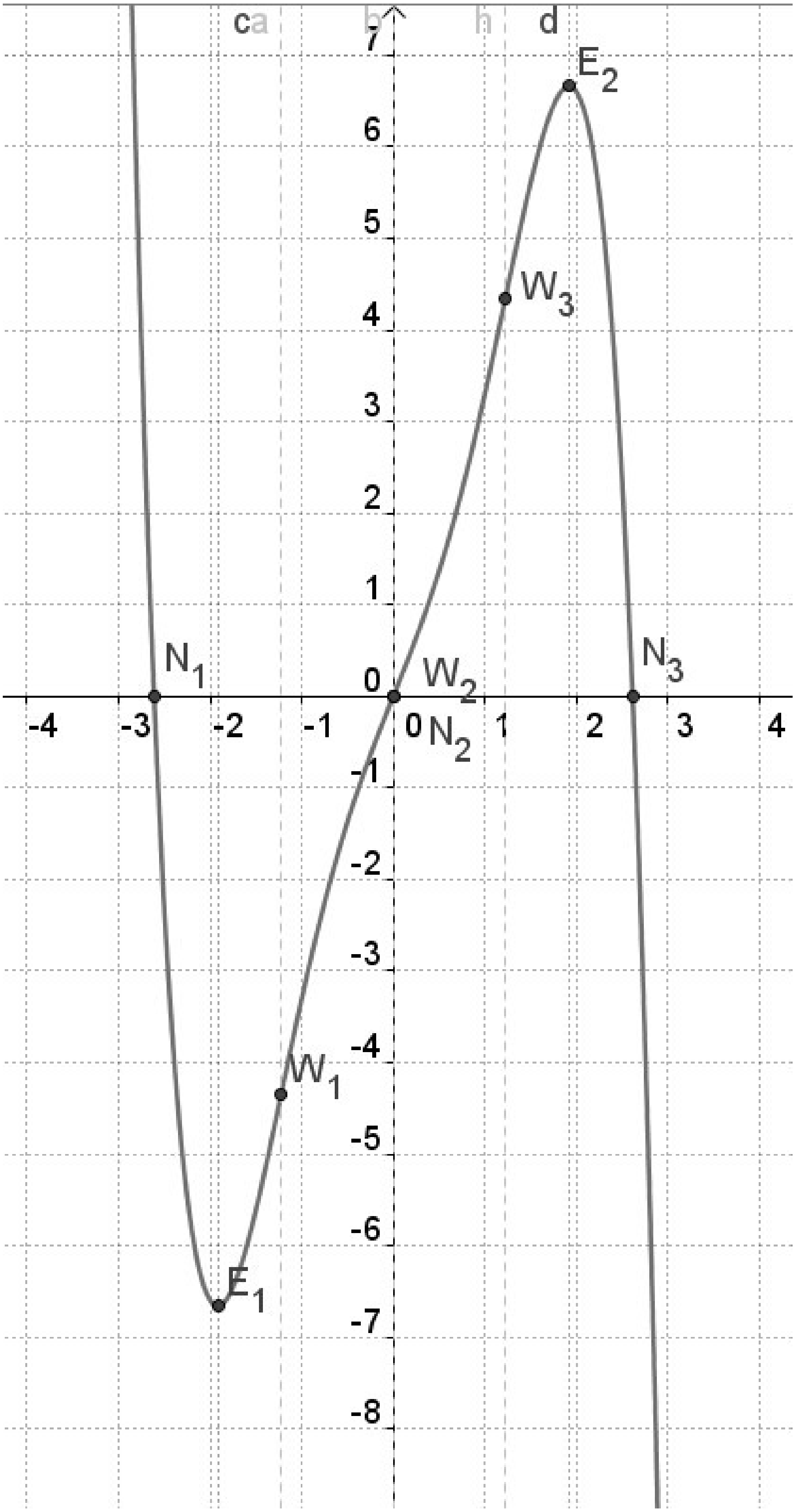
Soweit ich es sehe, stimmt alles, aber wenn ihr Fehler findet, teilt mir das bitte mit.

Und wenn ihr etwas nicht versteht, fragt bitte nach (aber vorher bitte ein wenig selbst forschen, das bringt mehr als *sofort* nachzufragen).

Vom mathematischen Niveau trifft der Schwierigkeit dieser Aufgabe etwa den in der Klausur, wenn auch die Klausuraufgabe etwas unaufwändiger werden könnte.

Schreibt mir doch mal, wie lange ihr gebraucht habt, das hilft mir bei der Klausurkonzeption! Entweder über das Formular auf der Webseite oder auch an 11d@steyvel.com

Danke, liebe Grüße, eine feine freie Zeit und viel Erfolg beim Lernen!



c a b h d
E2
W3
N1
0 W2
N3
N2
W1
E1
-4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4
7 6 5 4 3 2 1 -1 -2 -3 -4 -5 -6 -7 -8