

Funktionsscharen

Wozu und wie?

Wenn man es mit mehreren Funktionen zu tun hat, deren Gleichungen sich in einigen Aspekten ähnlich sind, und diese Funktionen z.B. untersuchen soll, kann es sehr ermüdend sein, dies für jede Funktion einzeln durchzuführen. Eine bessere Option ist, diese *Schar von Funktionen* in einer Gleichung zusammenzufassen. Aus einer langen Liste verschiedener Funktionen wird somit eine einzige Gleichung mit ein paar Zusatzinformationen:

$$\left. \begin{array}{l}
 f_{-5}(c) = -c^3 - 5c \\
 f_{-4}(c) = -c^3 - 4c \\
 f_{-3}(c) = -c^3 - 3c \\
 f_{-2}(c) = -c^3 - 2c \\
 f_{-1}(c) = -c^3 - 1c \\
 f_0(c) = -c^3 \\
 f_1(c) = -c^3 + c \\
 f_2(c) = -c^3 + 2c \\
 f_3(c) = -c^3 + 3c \\
 f_4(c) = -c^3 + 4c \\
 f_5(c) = -c^3 + 5c
 \end{array} \right\} f_r(c) = -c^3 + rc \quad r \in \mathbb{Z}, -5 \leq r \leq 5$$

Es reicht dann, die Funktion $f_r(c) = -c^3 + rc$ zu untersuchen, die Ergebnisse in Abhängigkeit von r anzugeben und mit deren Hilfe z.B. die Lage von Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen etc. anzugeben.

Vorsicht!

Der neue „Buchstabe“ (natürlich kann man auch Herzchen, Gießkannen oder gothische Kathedralen benutzen) ist keine zusätzliche Variable, sondern ein so genannter **Parameter**. Er ist zwar, wie die Variable, ein Platzhalter für Zahlen, muss aber bei allen Rechnungen (etwa Ableitungen etc.) wie eine feste Zahl behandelt werden. Bei obiger Funktionsschar heißen die Ableitungen demnach:

$$\begin{aligned}
 f_r(c) &= -c^3 + rc \\
 f_r'(c) &= -3c^2 + r \\
 f_r''(c) &= -6c \\
 f_r'''(c) &= -6 \\
 f_r''''(c) &= 0
 \end{aligned}$$

Eine Übungsaufgabe

1. Untersuche die Funktionsschar $f_r(c) = -c^3 + rc$ vollständig (bis auf das Skizzieren des Graphen).
2. Für welche Werte von r hat f ganzzahlige Nullstellen?
3. Für welche Werte von r hat f ganzzahlige Extremstellen?
4. Beschreibe mit eigenen Worten kurz und verständlich, aber mathematisch korrekt, welchen Einfluss der Parameter r auf die Lage der Wendepunkte der Funktion hat.
5. Es gibt unter den in der Schar vertretenen Funktionen einige, die sich beschweren, dass sie nur eine Nullstelle und keine Extremstellen haben. Finde heraus, ob sie die Wahrheit sprechen oder sich verrechnet haben. Falls es sie gibt und jede mit einem Eis zu besänftigen wäre, wie viel Eis bräuchten wir.
6. Schicke jemanden ins Nordi, Eis holen.
7. Zeichne für drei verschiedene Werte von r die passenden Graphen.

Weitere Übungsaufgaben für die ganz Schnellen gibt es im Buch ab Seite 197.