DER ZWEITE SCHRITT BEI DER FUNKTIONSUNTERSUCHUNG:

Nullstellen

Der zweite Schritt bei der Untersuchung von Funktionen ist die Untersuchung auf Nullstellen. Das sind schlichtweg die Stellen (=Variablenwerte), an denen die Funktionswerte 0 betragen. Anders ausgedrückt: Wenn man in die Funktionsmaschine eine Nullstelle hineinwirft, kommt eine 0 heraus. Eine Nullstelle ist dabei nur manchmal selbst 0, meistens jedoch irgendeine andere Zahl.

Wenn man die Zusammenhänge von Stellen und Funktionswerten in einem Graphen veranschaulicht, sind Nullstellen die Stellen, an denen der Funktionsgraph die Koordinatenachse schneidet, auf der die Stellen abgetragen werden (oft die so genannte x-Achse).

Die Bedingung kann man in mathematischer Sprache so formulieren:

Nullstellen einer Funktion r(s) sind alle Stellen s_{ni}, für die gilt: $r(s_{ni}) = 0$.

Finden von Nullstellen

Das Auffinden der Nullstellen funktioniert prinzipiell recht einfach: Man setzt den Funktionsterm gleich 0 und versucht, mithilfe algebraischer Methoden die Variablenwerte zu finden, für die der Funktionswerte o beträgt.

Beispiele zur Berechnung

Konstante Funktionen

Funktionen des Typs k(u) = c, wobei c eine feste Zahl ist, also z.B. k(u) = 70, haben keine Nullstellen, da die Gleichung 0 = 70 nicht erfüllt werden kann und immer falsch ist. Die Funktion j(L) = 0 hat nur Nullstellen, der Funktionswert ist überall 0.

Lineare Funktionen

Funktionen des Typs d(g) = ag + b, wobei a und b feste Zahlen sind, haben, sofern nicht irgendwelche Zusatzbedingungen ins Spiel kommen, genau eine Nullstelle. Ihre Graphen sind Geraden. Ein Beispiel dazu:

$d(g) = -5g + 12$ *(das ist die Funktionsgleichung)*
$d(g) = 0$ *(das ist das, was man gern hätte: Funktionswert gleich 0)*
$0 = -5g + 12$ *(das ist die Kombination aus den beiden Zeilen darüber)*
$5g = 12$
$g = 2{,}4$

Die einzige Nullstelle ist also $g_n = 2{,}4$.
$d(2{,}4) = -5 \cdot 2{,}4 + 12$
$d(2{,}4) = -12 + 12 = 0$

Quadratische Funktionen

Quadratische Funktionen haben maximal zwei Nullstellen. Manche aber auch eine oder keine. Zu allen drei Fällen ein Beispiel:

Die Funktion $r(t) = 5t^2 + 1$ hat keine Nullstelle, denn egal, was man für t (die Variable) einsetzt, man erhält immer eine positive Zahl als Funktionswert. t wird nämlich quadriert und Quadrate sind immer positiv.

Die Funktion $z(t) = 5t^2$ hat genau eine Nullstelle, denn es gibt genau eine Stelle, die bewirkt, dass der Funktionswert 0 wird, nämlich eben auch die 0.

Die Funktion $z(t) = 5t^2 - 5$ hat genau zwei Nullstellen, denn es gibt genau zwei Stellen, die bewirken, dass der Funktionswert 0 wird, nämlich $+1$ und -1.

Wie man Nullstellen bei quadratischen Funktionen findet

Quadratische ganzrationale Funktionen lassen sich ja stets in der Grundform

$f(x) = a_2x^2 + a_1x^1 + a_0x^0 = a_2x^2 + a_1x + a_0$

schreiben. Man erinnere sich daran, wieso man in der hinteren Version des Terms die 1 im Exponent und das ganze x^0 weglassen kann!
Damit die Funktion quadratisch bleibt, darf a_2 nicht 0 sein (siehe Definition ganzrationaler Funktionen), aber die beiden anderen Koeffizienten dürfen gerne 0 sein. Wie man quadratische Funktionen löst, dazu folgende Beispiele. Jeweils ist ein anderer (oder kein) Koeffizient 0.

$j(k) = 19k^2$

Hier sind alle Koeffizienten außer a_2 gleich 0. a_2 ist gleich 19. Man findet nun Nullstellen folgendermaßen:

$j(k) = 19k^2$

$j(k) = 0$

$0 = 19k^2$

$0 = k^2$

$0 = k$

Es gibt also eine Nullstelle: $k_N = 0$

Nächste Funktion: $w(p) = 38p^2 - 2p$
Hier ist nur der Koeffizient a_0 (der gleichzeitig das absolute Glied ist) gleich 0. a_2 ist gleich 38, a_1 ist gleich -2. Man findet nun Nullstellen folgendermaßen:

$$w(p) = 38p^2 - 2p$$
$$w(p) = 0$$
$$38p^2 - 2p = 0$$
$$p(38p - 2) = 0$$
$$p_{N1} = 0$$
$$38p_{N2} - 2 = 0$$
$$38p_{N2} = 2$$
$$p_{N2} = \frac{2}{38} = \frac{1}{19}$$

Es gibt also zwei Nullstellen: Nullstelle: $p_{N1} = 0$ und $p_{N2} = \frac{1}{19}$

Noch was anderes: $n(c) = 76c^2 - 38c - 19$

Bei dieser Funktion ist keiner der Koeffizienten 0.
Es gilt: $a_2 = 76$, $a_1 = -38$, $a_0 = -19$

Nun geht man so vor:

$$n(c) = 76c^2 - 38c - 19$$
$$n(c) = 0$$
$$76c^2 - 38c - 19 = 0$$
$$c^2 - \frac{1}{2}c - \frac{1}{4} = 0$$
$$c_{1/2} = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}}$$
$$c_{1/2} = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{4}{16}}$$
$$c_{1/2} = +\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{5}{16}}$$
$$c_{1/2} = \frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{5}}{4}$$
$$c_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \approx 0{,}8090169943749474241022934171828$$
$$c_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{4} \approx -0{,}3090169943749474241022934171828$$

Es kamen also unter Zuhilfenahme der pq-Formel zwei Nullstellen zum Vorschein. Aber Obacht: Es kann sein, dass unter der Wurzel bei der pq-Formel eine 0 oder gar eine negative Zahl steht. Dann hat die Funktion eine oder auch keine Nullstelle.

Mit den vorgestellten Verfahren sollten sich die Nullstellen aller quadratischen Funktionen finden lassen.

Ganzrationale Funktionen höheren Grades

Leider hat man es nicht nur mit linearen und quadratischen Funktionen zu tun, die noch recht gemütlich zu bearbeiten sind, sondern auch mit ganzrationalen Funktionen höheren Grades, bei denen zur Findung der Nullstellen teils reichlich bizarre und zudem reichlich unmathematisch scheinende Methoden benutzt werden.

Finden der Nullstellen ohne wirklich neue Technik

Zunächst gibt es drei Sorten von Funktionen höheren Grades, denen man mit bisherigen Mittel und einem kleinen Trick beikommen kann. Danach kommen die fiesen Funktionen.

Die erste Sorte sieht etwa so aus: $s(j) = 2j^{27} - 268435456$

Es sind also lediglich die Koeffizienten a_n und a_0 ungleich 0, alle anderen Koeffizienten sind gleich 0. Bei einer solchen Funktion die Nullstellen zu finden, ist nicht sehr geheimnisvoll, man muss einfach beim geeigneten Schritt die n-te Wurzel zu ziehen:

$$s(j) = 2j^{27} - 268435456$$
$$s(j) = 0$$
$$0 = 2j^{27} - 268435456$$
$$268435456 = 2j^{27}$$
$$134217728 = j^{27}$$
$$2 = j$$

Man beachte, dass sich zwei Nullstellen ergeben hätten, wenn n eine gerade Zahl gewesen wäre.

Bei der zweiten Sorte einfach zu lösender höhergradiger Funktionen muss man einfach möglichst viel von der Variable ausklammern – wenn es denn eben geht.

$$i(f) = 15f^{376} - 4{,}665f^{375} + 0{,}0002f^{374}$$
$$i(f) = f^{374}(15f^2 - 4{,}665f + 0{,}0002)$$

Mit dem Wissen um quadratische Funktionen lässt sich das dann lösen.

Bei der dritten Sorte einfach zu lösender höhergradiger Funktionen muss ein Trick angewandt werden, nämlich die Substitution.

$e(Y) = Y^{20} + 10Y^{10} + 9$

Bei dieser Funktion ist die Beobachtung ausschlaggebend, dass die Variable nur in zwei Potenzen vorkommt und die eine doppelt so groß ist wie die andere. Dann kann man den eben erwähnten Trick der Substitution anwenden und Y^{10} (weil da die Variable in der kleineren Potenz vorkommt) durch irgendein anderes Symbol ersetzen, z.B. Ü. Damit würde dann auch gelten: $Y^{20} = (Y^{10})^2 = Ü^2$ und somit könnte man für den Funktionsterm auch schreiben:

$e(Ü) = Ü^2 + 10Ü + 9$

Das ist nun eine quadratische Funktion, die man wie oben beschrieben lösen kann. Man bekommt nach Anwendung der pq-Formel folgendes Ergebnis:

$Ü_1 = -1$ und $Ü_2 = -9$

Nun darf man aber nicht vergessen, dass man am Anfang Y^{10} durch Ü ersetzt hat und muss diese Ersetzung nun rückgängig machen. Damit würde also folgendes vorläufiges Ergebnis dastehen:

$Y_1^{10} = -1$ und $Y_2^{10} = -9$

Man müsste also jeweils aus -9 und -1 die 10te Wurzel ziehen. Da man aber keine gerade Wurzel aus negativen Zahlen ziehen kann, haben wir uns Zeit gespart und können allerdings auch keine Nullstellen für die Funktion e(Y) vorweisen.

Soweit, so gut. Jetzt wird's herb.

Finden der Nullstellen über Raten und Polynomdivision

Ja, ihr habt richtig gelesen: Es gibt Funktionen, deren Nullstellen man raten muss.

Bei einer Funktion wie
$z(g) = g^3 - g^2 - g + 1$,
bei der die ersten vier Koeffizienten (a_3, a_2, a_1, a_0) alle ungleich 0 sind, können wir nichts ausklammern, wir kommen mit der pq-Formel nicht weiter und substituieren bringt auch nichts.

Und in so einem Fall muss man tatsächlich eine Nullstelle erraten. Das hört sich bescheuert an, ist es auch irgendwie, aber es gibt tatsächlich kein besseres Verfahren. Allerdings steht man beim Raten nicht völlig im Regen: Wenn es eine oder mehrere Nullstellen gibt, findet man sie in vielen Fällen, indem man Teiler des

absoluten Glieds ausprobiert, und zwar jeweils die positive und die negative Version.
Das absolute Glied hier ist 1, also probieren wir die 1 und ihr negatives Gegenstück, die -1 aus.

$$z(1) = 1^3 - 1^2 - 1 + 1 = 1 - 1 - 1 + 1 = 0$$
$$z(-1) = (-1)^3 - (-1)^2 - (-1) + 1 = -1 - 1 + 1 + 1 = 0$$

Sensationell! Bei beiden Stellen hat es geklappt, also haben wir durch reines Ausprobieren zwei Nullstellen gefunden, nämlich 1 und -1. Nun ist natürlich die Frage berechtigt, wieso wir bisher Ausklammern oder auch die pq-Formel benutzen mussten, wenn man Nullstellen doch genauso gut einfach erraten kann. Die Antwort ist ernüchternd: Das Erraten von Nullstellen ist zwar bei einigen Funktionstypen die einzige zum Ziel führende Strategie, allerdings sind „in der Realität" (also Wirtschaft, Naturwissenschaft etc.) vorkommende Funktionen oft nicht so gutmütig wie die Funktion eben. Da stehen ungemütliche Dezimalbrüche als absolutes Glied hinten und die Strategie, Teiler des absoluten Glieds auszuprobieren, geht nicht auf. Mit den Verfahren hingegen, die wir auf Funktionen bis zum Grad 2 angewandt haben, lassen sich jedoch alle quadratischen Funktionen „knacken", egal, wie kompliziert sie sind.
Rein mathematisch sind wir jetzt in einer blöden Situation: Wir sind darauf angewiesen, wenn es um höhergradige Funktionen geht, solche Funktionen vorgesetzt zu bekommen, deren Nullstellen relativ einfach zu erraten sind. Das ist irgendwie unbefriedigend, aber ist nun mal so. Ansonsten müssten wir das Finden von Nullstellen einem Computer überlassen, was zwar recht bequem, aber ohne jeden Lerneffekt wäre.
Fassen wir zusammen: Wir können zwar bei jeder Art von quadratischen Funktionen die Nullstellen finden, bei höhergradigen aber nur, wenn wir einige Nullstellen – mindestens eine – erraten können.

Bezüglich unseres Beispiels gibt es aber noch eine zu beantwortende Frage: Haben wir denn alle Nullstellen gefunden? Zunächst gilt es den folgenden, allgemeinen Satz zu beachten:

Ganzrationale Funktionen n-ten Grades haben maximal n Nullstellen.

Das heißt in Bezug auf unser Beispiel, dass es maximal drei Nullstellen geben kann. Es können aber auch nur die zwei sein, die wir schon haben. Wie können wir das herausfinden? Wenn es tatsächlich nur die beiden schon gefundenen Nullstellen gibt, ist Ausprobieren kein weiter führender Weg. Man kann durch Raten und Probieren nämlich zwar Nullstellen finden, aber wenn man auf diese Weise keine weiteren Nullstellen findet, kann man nicht sagen, dass es keine weiteren gibt!
Es ist so ähnlich wie mit Ostereiern, die im Garten versteckt sind. Wenn man eins findet, kann man beweisen, dass es eins gibt, aber wenn man nach langem Suchen keins mehr findet, kann man nicht beweisen, dass man alle gefunden hat. Es könnte sich immer noch eins irgendwo verbergen.

Wie kann man nun (relativ) sicher sein, alle Nullstellen gefunden zu haben? Dazu muss man den Funktionsterm zerlegen. Und das geht mit einem wahren Schülerschreck, der Polynomdivision.
Man geht folgendermaßen vor: Man nimmt sich den Funktionsterm (nicht die ganze Funktionsgleichung!), also

$$g^3 - g^2 - g + 1$$

Dann nimmt man sich die Funktionsvariable, also g, und zieht von ihr eine der erratenen Nullstellen ab, nehmen wir mal 1. Dann hat man:

$$g - 1$$

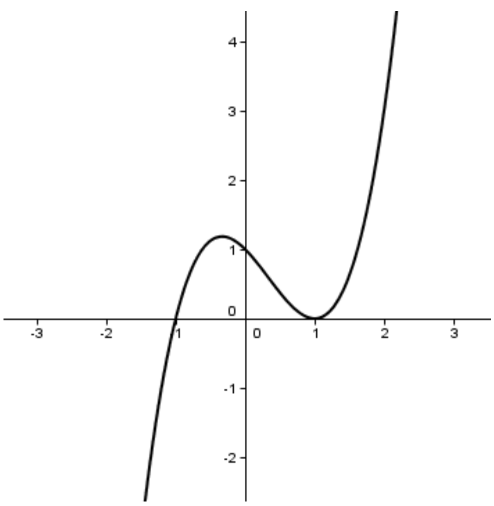
So, und nun teilt man den Funktionsterm durch dieses g – 1:

$$(g^3 - g^2 - g + 1) : (g - 1) =$$

Tja … ähhh … und wie macht man das? Es funktioniert im Grunde genauso wie das schriftliche Dividieren aus der Grundschule. Wie es genau geht, zeigt euch die PowerPoint-Datei, die auch auf steyvel.com zu finden ist. Mit den Animationen dort kann man das besser erklären als auf einem starren Blatt.

Jedenfalls kommt als Ergebnis Folgendes heraus: $(g^3 - g^2 - g + 1) : (g - 1) = g^2 - 1$

Das Ergebnis ist also ein quadratischer Term. An die restlichen Nullstellen des Ursprungsterms gelangt man, indem man die Nullstellen dieses kleinen quadratischen Terms ausrechnet. Und die sind wieder 1 und -1. Das heißt, dass es keine weiteren Nullstellen gibt, außer den beiden, die wir schon hatten. Zur Veranschaulichung hier der Funktionsgraph der Funktion.



Tipp: Mit dem kostenlosen Programm GeoGebra kann man sich Funktionsgraphen zeichnen lassen, auch zur Überprüfung der eigenen Rechnungen.

Bei anderen Funktionen kann durchaus noch eine weitere Nullstelle herausspringen, aber hier war es eben nicht so. Nun ist es an der Zeit, selbst einige Aufgaben zu rechnen.

Amen.