DER ERSTE SCHRITT BEI DER FUNKTIONSUNTERSUCHUNG:

# Symmetrien

Der erste Schritt bei der Untersuchung von Funktionen ist die Untersuchung auf Symmetrien. Es gibt viele verschiedene Arten von Symmetrien, aber wir beschränken uns auf die folgenden beiden. Sowohl in der Benennung als auch in der Erklärung wird vielfach Bezug auf den Funktionsgraph (=Veranschaulichung der Zusammenhänge zwischen Stellen [=Variablen-Werten] und Funktionswerten) genommen, aber Symmetrie kann auch ganz abstrakt als Eigenschaft des unnahbaren Gebildes FUNKTION verstanden werden.

Im Folgenden heißt die Achse im Koordinatensystem, auf der die Stellen abgetragen werden, x-Achse, die Achse, auf der die Funktionswerte abgetragen werden, y-Achse.

### a) Achsensymmetrie an der y-Achse

Der Graph einer Funktion a(x) ist achsensymmetrisch zur y-Achse, wenn folgender Zusammenhang gilt:

$a(-x) = a(x)$

Das heißt in Worten beschrieben: Wenn man in der ursprünglichen Funktionsgleichung x (oder in anderen Funktionen andere Variablen) durch –x ersetzt, dann muss der Funktionsterm gleich bleiben.

Ein Beispiel:

$a(x) = 5x^2 + 6$

$a(-x) = 5(-x)^2 + 6 = 5x^2 + 6$

Demnach ist die Funktion achsensymmetrisch an der y-Achse. Man beachte, dass die Klammern wichtig sind und dass $(-x)^2 = (-x)(-x) = xx = x^2$ ist (minus mal minus ergibt nämlich plus).

Anderes Beispiel:

$a(x) = 5x^2 + 6x$

$a(-x) = 5(-x)^2 + 6(-x) = 5x^2 - 6x$

Demnach ist die Funktion nicht achsensymmetrisch an der y-Achse.

Bitte auf nächstem Blatt weiter lesen.

## b) Punktsymmetrie am Koordinatenursprung

Der Graph einer Funktion a(x) ist punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung, wenn folgender Zusammenhang gilt:

$-a(-x) = a(x)$ oder auch $a(-x) = -a(x)$

Das heißt in Worten beschrieben: Wenn man in der ursprünglichen Funktionsgleichung x (oder in anderen Funktionen andere Variablen) durch –x ersetzt und dann den ganzen Funktionsterm mal (-1) nimmt (bzw. alles in eine Klammer setzt und ein Minus davor schreibt), dann muss der Funktionsterm gleich bleiben. Man beachte, dass die rechte Version der Bedingung sich ergibt, wenn man die linke Gleichung mit (-1) multipliziert.

Ein Beispiel:

$$a(x) = 5x^3 + 6x$$
$$-a(-x) = -(5(-x)^3 + 6(-x)) = -(-5x^3 - 6x) = 5x^3 + 6x$$

Demnach ist die Funktion punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung. Man beachte wieder, dass die Klammern wichtig sind.

Anderes Beispiel:

$$a(x) = 5x^2 + 6x$$
$$-a(-x) = -(5(-x)^2 + 6(-x)) = -(5x^2 - 6) = -5x^2 + 6$$

Demnach ist die Funktion nicht punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung.

## Vereinfachende Regel für ganzrationale Funktionen

Wenn die Variable im Funktionsterm nur mit geraden Exponenten vorkommt (wobei hier die 0 auch als gerade zählt), dann ist der Funktionsgraph achsensymmetrisch zur y-Achse.

Wenn die Variable im Funktionsterm nur mit ungeraden Exponenten vorkommt, dann ist der Funktionsgraph punktsymmetrisch zur y-Achse.

In allen anderen Fällen ist der Funktionsgraph nichts von beiden.