Wie stelle ich eine Parabelgleichung auf, wenn ich nur wenige Punkte weiß?

Erstmal Informationen sammeln!

Nehmen wir mal an, die Aufgabe lautet etwa so: Blablabla … Parabelgleichung … blablabla … Graph geht durch die und die Punkte … blablabla.

So, nun wissen wir erstmal gar nix. Wirklich? Ha, eben doch! Wir wissen, dass wir die Gleichung einer Funktion herausfinden sollen, deren Graph eine Parabel ist. Ihr fragt, was das denn nützt? Oh, sehr viel! Denn wenn der Graph einer Funktion eine Parabel sein soll, dann kann die Funktion nicht irgendeine beliebige Gleichung haben. Sie muss von folgender Form sein:

$$\mathbf{f(x) = ax^2 + bx + c}$$

Will jemand wissen, wieso? Die Antwort ist so banal wie einleuchtend: Wenn das Ding eine andere Gleichung hätte, wäre es einfach keine Parabel, sondern sonst was!

Gut. Soweit, so blöd. Lauter Buchstaben, wenige Zahlen. Müssen wir für alle die irgendwie eine Zahl finden, dass also nachher nur noch Zahlen da stehen? Neeeein!

Das x ist die Funktionsvariable (deswegen steht es hinter dem Namen der Funktion, f, in Klammern), die soll auch zum Schluss stehen bleiben. Aber wir müssen statt a, b und c später Zahlen haben. Ächz! Drei Werte, die wir rausfinden müssen.

Wenn drei Zahlen herausgefunden werden sollen – merkt euch das jetzt gefälligst! – braucht man drei verschiedene Informationen. In den allermeisten Fällen sind dies irgendwelche Gleichungen. Doch jetzt Obacht!

Vorsicht vor Mogelpackungen!

Hier kommen nun mal zwei Beispielgleichungen (die einen Sch…dreck mit der Aufgabe zu tun haben): $27 = 3g$ und $2g = 18$. Zunächst sehen die mal aus wie zwei verschiedene Gleichungen, aber sie enthalten nur eine einzige Information, nämlich die, dass $g = 9$ ist.

Die Lehre, die ihr daraus ziehen sollt, ist: Gebt dringend acht, dass ihr nicht zwei Gleichungen habt und denkt, die enthalten zwangsläufig zwei Informationen! Das sollte zwar so sein, ist aber beileibe nicht immer so!

Wie komme ich nun zu den nötigen Informationen?

In solcherlei Aufgaben stehen die benötigten Gleichungen nie explizit da, das wäre ja viel zu einfach und höchstens Unterhaltung für den kleinen Nils. Aber dafür gibt es andere Informationen, nämlich die Punkte, durch die die Parabel angeblich geht. Nehmen wir einmal an, dies seien die folgenden:

P (-2|-1) Q (0|5) R (1|2)

Aber wie, um Himmels willen, soll man darauf nun Gleichungen basteln? Das sind doch Punkte auf einem Graphen und ... bäh.

Nicht verzagen, Krissel fragen! Punkte bestehen doch aus zwei Komponenten: Einem x-Wert und einem y-Wert, auch Koordinaten genannt. Nun haben wir doch die Rohfassung der Parabelgleichung (ganz oben), in dieser kommt doch x vor. Da kann man doch vielleicht den x-Wert aus irgendeinem Punkt einsetzen. Gut, da wir gerade nichts besseres wissen, machen wir das mal mit dem x-Wert aus Punkt P.

Aus der Rohfassung $\mathbf{f(x) = ax^2 + bx + c}$

wird jetzt $\mathbf{f(-2) = a(-2)^2 + b(-2) + c}$

ganz ganz wichtig sind die Klammern, denn die 2 möchte sichergestellt wissen, dass das minus zu ihr gehört, nicht woanders hin.

Fein. Und nun? Da wir immer noch nichts besseres wissen, rechnen wir ein bisschen herum, denn so, wie es jetzt da steht, sieht der ganze Fets noch recht umständlich aus.

$\mathbf{f(-2) = a(-2)^2 + b(-2)x + c = a \cdot 4 - 2b + c = 4a - 2b + c}$

Schön soweit. Sieht schon stylisher aus als vorher. Aber ... öhöm ... was jetzt? Steckt da jetzt schon irgendeine Information drin, die ich nicht sehe?

Funktionswert & y-Koordinate

Bevor uns das Ding wirklich was nützt, müssen wir daran denken, dass man die y-Koordinaten von irgendwelchen Punkten ausrechnet, indem man den x-Wert eines Punktes in der Funktionsgleichung für x einsetzt und schlichtweg ein bisschen rechnet. Insofern könnte man die Koordinaten des Punktes P auch so angeben: (-2|f(-2)). Schick, oder?

So, und nun schaut euch noch mal die letzte Rechnung an! Wir haben doch nur für x einen konkreten Wert, nämlich -2 eingesetzt und den Funktionswert ausgerechnet – soweit das mit diesen ganzen anderen Buchstaben möglich ist.

Aber – Potzblitz! – wir kennen doch den Funktionswert, der zu x = -2 gehört! Er steht oben und ist schlicht der y-Wert des Punktes P! Also ist f(-2) = -1. Wundervoll! Das heißt, dass wir statt f(-2) auch -1 hinschreiben können. Machen wir das bei der vorigen Rechnung, bekommen wir folgendes heraus (den Teil in der Mitte können wir jetzt weglassen, wir wissen ja, dass ganz rechts das gleiche steht wie ganz links):

$$f(-2) = 4a - 2b + c$$
$$-1 = 4a - 2b + c$$

Und das, meine Damen und Herren, ist unsere erste Information, deswegen bekommt diese Gleichung jetzt den Namen (römisch) I – äußerst kreativ, nicht wahr?

Jetzt geht's schneller

Nun brauchen wir noch zwei weitere Informationen. Auch wenn das eben doch eine sehr schwere Geburt war, das Verfahren – ich sage das mal ganz vorsichtig – ist sooo schwer doch nicht … hoffentlich.

Jedenfalls geht es jetzt genauso wie eben. Machen wir den ganzen Prozess mit den Werten des Punktes Q durch.

$$f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 0 + 0 + c = c$$

Nullen schreibt man nämlich nicht hin, wenn sie nur addiert oder subtrahiert werden.

o, da wir aufgrund der Koordinaten des Punktes Q wissen, dass f(0) = 5 ist, können wir schreiben:

$$f(0) = c$$
$$5 = c$$

Und das ist doch mal eine geile Information, nicht wahr?! Sie bekommt die Nummer II.

Jetzt noch die Verarbeitung des dritten Punktes:

$$f(1) = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 1a + 1b + c = a + b + c$$

$$f(1) = a + b + c$$
$$2 = a + b + c$$

Auch das ist großartig, unsere dritte Information. Wundersamerweise bekommt sie die Nummer III.

So, das war's mit der Informationsbeschaffung. Mehr gibt's nicht. Wir haben drei Gleichungen, die amtlich nicht die gleiche Information enthalten, wir können also glücklich sein.

Informationsverarbeitung

So, nun müssen wir gucken, wie wir mit diesen drei Gleichungen umgehen:

$$\begin{array}{ll} \textbf{I.} & -1 = 4a - 2b + c \\ \textbf{II.} & 5 = c \\ \textbf{III.} & 2 = a + b + c \end{array}$$

Da gibt es ja mehrere Verfahren, die ich jetzt an dieser Stelle noch nicht vorstellen kann. Aber kommt vielleicht noch. Als erstes sollten wir mal das machen, was am nächsten liegt: Den hübschen Wert von c in die anderen Gleichungen einsetzen.

Formal ausgedrückt, setzen wir jetzt II in I ein:

$$-1 = 4a - 2b + c$$
$$-1 = 4a - 2b + 5$$
$$-6 = 4a - 2b$$

Beachtet, dass wir gleich ein wenig aufgeräumt haben und die 5 mit der -1 verrechnet wurde.

Und jetzt II in III:

$$2 = a + b + c$$
$$2 = a + b + 5 \quad |-5$$
$$-3 = a + b$$

Nun wissen wir schon etwas mehr, aber noch nicht so riesig viel mehr. Was wir gemacht haben, war, die Information aus Gleichung II zu verarbeiten. Das ist nun geschehen und wir können diese Gleichung vorerst vergessen. Es bleiben:

$$\begin{array}{ll} \textbf{I.} & -6 = 4a - 2b \\ \textbf{III.} & -3 = a + b \end{array}$$

Was machen wir da jetzt? Es gibt bei so etwas mehrere Möglichkeiten und in 12.2 werdet ihr die eleganteste von allen hoffentlich kennen lernen. Aber wir sind dafür ein Jahr zu früh dran, also müssen wir es anders machen.

Ich schlage folgendes vor: Wir versuchen, beide Gleichungen so umzuformen, dass b allein auf einer Seite steht. Bei III sollte das gar kein Problem sein, bei I scheint auch nur geringer Aufwand zu warten. Also ab dafür

Erstmal die I:

Zack, umblättern, das passt nicht mehr alles auf diese Seite!

Also, jetzt aber die I:

$$-6 = 4a - 2b \quad | +2b;\ +6$$
$$2b = 4a + 6 \quad | :2$$
$$b = 2a + 3$$

Fein. Dann nun die III:

$$-3 = a + b \quad | -a$$
$$-3 - a = b$$

Ich bin begeistert. Wenn b gleich das eine ist und b auch gleich das andere ist, dann ist das eine auch das andere. Klar soweit? ☺

Also, setzen wir mal gleich, was noch gleichzusetzen ist.

$$-3 - a = 2a + 3 \quad | -2a;\ +3$$
$$-3a = 6 \quad | :(-3)$$
$$a = -2$$

So, der Rest ist Jux. Wir nehmen uns eine der kleinen Gleichungen oben und setzen für a eben -2 ein. Ich nehme hier jetzt $-3 - a = b$

$$-3 - a = b$$
$$-3 - (-2) = b$$
$$-3 + 2 = b$$
$$-1 = b$$

Das ist ja jetzt so was von entzückend! Wir haben nun nur durch Einsetzen und Gleichsetzen alle drei Koeffizienten (so heißt das auf schlau) herausgefunden. Und damit wird aus der Rohform der Parabelgleichung nur durch schlichtes Einsetzen unsere spezielle Parabelgleichung:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$
$$f(x) = -2x^2 + (-1)x + 5$$

$$\boxed{f(x) = -2x^2 - x + 5}$$

So, ich hoffe es sind alle zufrieden. Ich hab jetzt Hunger und wünsche einen angenehmen Abend. Wer will, kann ja daraus noch Scheitelpunktform machen. Ich esse jetzt aber.

Amen.