Einführung in die Integralrechnung

Onkel Dagoberts Gewinn

Herr Dagobert Duck, bekanntermaßen der reichste Mann der Welt, spekuliert eines schönen Tages an der Börse. Ganz zufällig ist es am heutigen Börsentag so, dass sich sein Zuwachs an Geld folgendermaßen berechnen lässt:

$$g(t) = t^2$$

Dabei gilt: t = vergangene Zeit seit Börsenbeginn in Stunden
$g(t)$ = Zuwachs zu Onkel Dagoberts Vermögen zum Zeitpunkt t (in Fantastilliarden Talern pro Stunde)

Zum Beispiel wächst Dagoberts Vermögen 5 Stunden nach Börsenbeginn um 25 Frd. Taler pro Stunde.

Wir nehmen an, dass der Entenhausener Börsentag 10 Stunden dauert.

Aufgabe 1

a) Entwickelt in Dreiergruppen einen Weg, um Onkel Dagoberts Gesamtgewinn an diesem Tag (zumindest annäherungsweise) zu ermitteln.
b) Wendet den Weg aus a) an.
c) Falls ihr den Gewinn nur annäherungsweise bestimmt habt, entwickelt Methoden, die Genauigkeit zu erhöhen.
d) Bereitet euch darauf vor, eure Ergebnisse zu präsentieren (es werden nicht alle Gruppen ihre Resultate vorstellen).

Dagobert Duck & Fähnlein Fieselschweif © Disney

Fähnlein Fieselschweifs Lagerplatz

Das Fähnlein Fieselschweif fährt zum Sommerlager an den Gumpensee. Dort bekommt es einen Lagerplatz zugeteilt, dessen Grundriss mathematisch etwa so zu beschreiben wäre:

- Links wird er von einem Teil der y-Achse begrenzt
- Unten wird er auf dem Intervall 0 bis 5 von der x-Achse begrenzt (1LE = 50m).
- Oben wird der Platz vom Seeufer begrenzt, das ungefähr dem Graph der Funktion $p(x) = \frac{1}{10}x^2 + 2$ entspricht.
- Rechts begrenzt den Platz ein Stück der Gerade $x = 5$.

Nun stellt der G.W.u.W.m.h.m.K.[1] den Fieselschweiflingen die Aufgabe, die Größe des Lagerplatzes zu ermitteln.

Aufgabe 2

a) Zeichne den Lagerplatz möglichst genau.
b) Entwickle ein Verfahren, mit dem man den Flächeninhalt des Platzes zumindest annähernd bestimmen kann.
c) Entwickelt Methoden, um die Genauigkeit zu erhöhen.
d) Bereitet euch darauf vor, eure Ergebnisse zu präsentieren (es werden nicht alle Gruppen ihre Resultate vorstellen).

Aufgabe 3

Erkläre, was die Aufgaben 1 und 2 miteinander zu tun haben. Hinweis: „Nichts“ o.ä. ist als Antwort falsch.

[1] Großer Wald- und Wiesenmeister mit herausragenden mathematischen Kentnissen

Ober- und Untersummen

➔ siehe auch S. 12–15 im Buch.

Man kann den Flächeninhalt unter einem Funktionsgraphen annäherungsweise mit Ober- und Untersummen bestimmen. Dabei gilt per Definition:

Untersumme < tatsächlicher Flächeninhalt < Obersumme

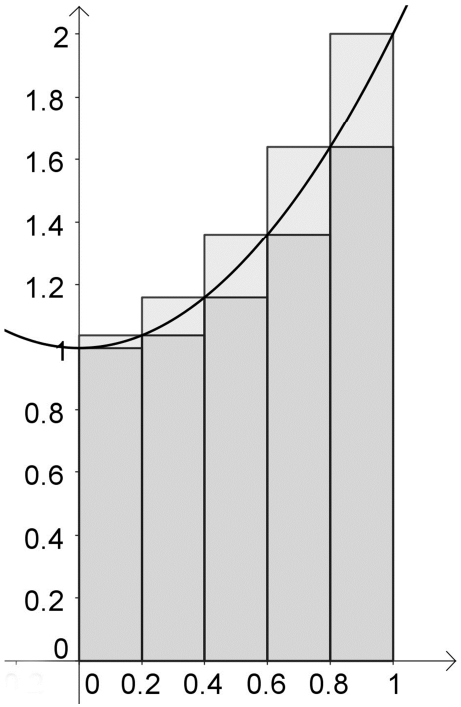
Beispiel

Es sollen Ober- und Untersumme zur Funktion $f(x) = x^2 + 1$ auf dem Intervall [0;1] bei fünf Segmenten berechnet werden.

$$\begin{aligned} O_5 &= \text{Streifenbreite} \cdot \left(f(0,2) + f(0,4) + f(0,6) + f(0,8) + f(1)\right) \\ &= 0,2 \cdot (1,04 + 1,16 + 1,36 + 1,64 + 2) \\ &= 1,44 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_5 &= \text{Streifenbreite} \cdot \left(f(0) + f(0,2) + f(0,4) + f(0,6) + f(0,8)\right) \\ &= 0,2 \cdot (1 + 1,04 + 1,16 + 1,36 + 1,64) \\ &= 1,24 \end{aligned}$$

- Wie man sieht, unterscheiden sich Ober- und Untersumme nur in einem einzigen Eintrag (f(1), bzw. f(0)).
- Man beachte, dass man die Funktionswerte in der Klammer anders hätte wählen müssen, würde der Graph auf dem Intervall bergab verlaufen.



Aufgabe 4

Bestimme jeweils die Ober- und Untersumme O_5 und U_5 für die angegebene Funktion auf dem angegebenen Intervall.

a) $a(x) = -x^2 + 4$ [0;2]
b) $b(x) = x^3$ [1;2]
c) $c(x) = 2x + 3$ [0;5]
d) $d(x) = 3x$ [0;z]
e) $e(x) = x^2$ [0;z]
f) $f(x) = 4x^3$ [0;z]

Ober- und Untersummen mit n Streifen

Um die Genauigkeit zu erhöhen. kann man die Streifenanzahl n nennen und dieses n gegen Unendlich laufen lassen.

Beispiel: Obersumme O_n für $f(x) = x^2$ auf [0;1]

$$\begin{aligned} O_n &= \frac{1}{n} \cdot \left(\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{n}{n}\right)^2 \right) \\ &= \frac{1}{n^3} \cdot \left(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2\right) \end{aligned}$$

Das ist ja nun sehr toll, aber was sollen wir mit dem Ausdruck in der Klammer anfangen?
Hier ist nun der Zeitpunkt für einen Exkurs gekommen.

Exkurs: Das Beweisverfahren der vollständigen Induktion

Dieses Verfahren für Beweise von Formeln für natürliche Zahlen funktioniert so:

1. Man stellt eine Behauptung auf, auf die man z.B. durch Ausprobieren, Geistesblitz oder Eingebung des Heiligen Geistes gekommen ist.
2. Man beweist, dass sie für eine natürliche Zahl stimmt.
3. Dann beweist man, dass sie für $n + 1$ stimmt

Da ja aufgrund von Schritt 3 die Behauptung auch für n+2, n+3 usw. gelten muss, gilt sie für jede beliebige natürliche Zahl, die größer oder gleich der in Schritt 1 gewählten Zahl ist.

Hier nun ein Beispiel:

1. Behauptung

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

2. Test für n=2

$$1^2 + 2^2 = 5 = \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot (2+1)(2 \cdot 2 + 1)$$

3. Nachweis für n+1

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 = (n+1)\left(\frac{1}{6} n(2n+1) + (n+1)\right)$$

$$= (n+1)\left(\frac{n(2n+1)}{6} + \frac{6n+6}{6}\right) = \frac{1}{6}(n+1)\left(2n^2 + 7n + 6\right) = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3)$$

$$= \frac{1}{6}(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)$$

Vollziehe diesen Beweis nach, kläre für dich zunächst nicht nachvollziehbare Schritte und bereite dich auf eine öffentliche Erläuterung vor!!!

Mit der eben bewiesenen Formel ist es kein Problem mehr, die Obersumme exakt zu bestimmen:

$$O_n = \frac{1}{n}\cdot\left(\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{n}{n}\right)^2\right) = \frac{1}{n^3}\cdot\left(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2\right)$$

$$= \frac{1}{6n^3}n(n+1)(2n+1) = \frac{1}{6}\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\frac{2n+1}{n}$$

Nun kann man n gegen Unendlich laufen lassen:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{6}\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\frac{2n+1}{n}\right) = \left(\frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2\right) = \frac{1}{3}$$

Das ist nun der Grenzwert der Obersumme und damit der exakte Flächeninhalt.

Aufgabe 5

Berechne – ähnlich wie im Beispiel – die Untersumme. Benutze das gleiche Intervall und die gleiche Funktion wie im Beispiel.

Aufgabe 6

Bestimme den Grenzwert der Ober- oder Untersumme der folgenden Funktionen auf dem angegebenen Intervall.

a) $a(x) = x + 1$ [0;1]
b) $b(x) = x^2$ [0;10]
c) $c(x) = 2x^2 + x$ [0;1]
d) $d(x) = x^2$ [0;z]
e) $e(x) = 3x^2$ [0;z]

Bei d und e sollte etwas auffallen. Versuche, einen Verdacht zu formulieren, wie man von der Funktion schnell zum Flächeninhalt kommen kann.

Stammfunktionen und unbestimmte Integrale

Stammfunktionen

Definition: Jede differenzierbare Funktion F, für die gilt $F' = f$, heißt **Stammfunktion** von f.

→ Seite 28ff im Buch.

Achtung!
Es gibt den Vorgang des **Ableitens**, der auch **Differenzieren** genannt wird, aber der Prozess in die Gegenrichtung heißt ausschließlich **Integrieren**. Die Benutzung des Wortes **Aufleiten** ist nicht gestattet.

Aufgabe 7

Stelle fünf verschiedene Stammfunktionen der Funktion $f(x) = 12x^5 - 9x^2 + 1$ auf.

Unbestimmte Integrale

Definition: Die Menge aller Stammfunktionen einer Funktion f wird als unbestimmtes Integral bezeichnet.
Schreibweise: $\int f(x)dx$

Beispiel

$$\int (8x^3 - 3x^2)dx = 2x^4 - x^3 + c$$

Das c am Ende wird als Stellvertreter für alle denkbaren Konstanten geschrieben.

Aufgabe 8

- Mache dir an Beispielen die Rechenregeln auf Seite 31 klar. Notiere eventuelle Fragen/Unklarheiten.
- Bearbeite folgende Übungen auf den Seiten 31 bis 33:

	Zu erledigen bis	**ging gut**	**war schwer**	**ging gar nicht**
1				
2				
3 b g i k (andere freiwillig)				
5				
6				