Integrationsregeln

→ Buch S. 162–175

Um bestimmte Integrale zu lösen, muss man sich einiger Tricks bedienen, von denen hier einige vorgestellt werden:

Partielle Integration = Produktintegration

Formel: $\int (u' \cdot v)dx = u \cdot v - \int (u \cdot v')dx$

Diese **Umkehrung der Produktregel** sollte immer dann angewandt werden, wenn die zu integrierende Funktion als Produkt aus einer einfach zu integrierenden und einer einfach abzuleitenden Funktion besteht.

Beispiel:

$$\int \left(\sin(3x) \cdot 5x^2\right)dx$$

Hier ist $\sin(3x)$ leicht zu integrieren, während die $5x^2$ sehr leicht abzuleiten ist – und die Ableitung vor allem einfacher als die Ausgangsfunktion ist. Man setzt:

$u'(x) = \sin(3x)$ $u(x) = -\frac{1}{3}\cos(3x)$

$v(x) = 5x^2$ $v'(x) = 10x$

$$= -\frac{1}{3}\cos(3x) \cdot 5x^2 - \int \left(-\frac{1}{3}\cos(3x) \cdot 10x\right)dx$$

Nun wendet man das gleiche Prinzip noch einmal an. Man muss im nächsten Schritt dringend auf alle Klammern achten!

Hierbei setzen wir:

$u'(x) = -\frac{1}{3}\cos(3x)$ $u(x) = -\frac{1}{9}\sin(3x)$

$v(x) = 10x$ $v'(x) = 10$

$$= -\frac{1}{3}\cos(3x) \cdot 5x^2 - \left(-\frac{1}{9}\sin(3x) \cdot 10x - \int \left(-\frac{1}{9}\sin(3x) \cdot 10\right)dx\right)$$

Nach der Zusammenfassung ist im folgenden Schritt das Integral dann vollständig aufzulösen.

$$= -\frac{1}{3}\cos(3x) \cdot 5x^2 + \frac{1}{9}\sin(3x) \cdot 10x + \int \left(-\frac{10}{9}\sin(3x)\right)dx$$

$$= -\frac{1}{3}\cos(3x) \cdot 5x^2 + \frac{1}{9}\sin(3x) \cdot 10x + \frac{10}{27}\cos(3x)$$

An dieser Stelle ist man (vorerst) fertig.

Ich empfehle dringend, die weiteren Beispiele auf den Seiten 163 und 164 genau anzusehen!

Substitution

Für die Substitution gibt es keine einzelne Formel, sondern einen mehr oder weniger festgelegten Ablauf, der an einem Beispiel erläutert werden soll. Die Substitution ist eine **Umkehrung der Kettenregel**. Leider muss ich darauf hinweisen, dass die Substitution bisweilen sehr schwierig anzuwenden ist, da das Bestimmen des zu substituierenden Terms teilweise viel mathematische Kreativität erfordert.

$$\int (5x-21)^8 dx$$

$$5x - 21 = z$$

$$(5x-21)^8 = z^8$$

Zunächst einmal muss man sich überlegen, was substituiert wird. Bei Termen wie bei dem links kann das alles in der Klammer sein. Man setzt diesen Term gleich einer anderen Variable, hier z.

$$\left.\begin{array}{l} z' = (5x-21)' = 5 \\ z' = \dfrac{dz}{dx} \end{array}\right\} 5 = \frac{dz}{dx}$$

$$\Rightarrow 5dx = dz$$

$$\Rightarrow dx = \frac{dz}{5}$$

Nun geht es etwas ans Eingemachte. Das dx im Integral ist ja gewissermaßen ein Repräsentant für die Streifenbreite. Diese ist bei z^8 – wenn das Integral ansonsten das gleiche bleiben soll – anders als bei $(5x-21)^8$. Man muss darum das dx durch einen Ausdruck mit dz ersetzen. Wie genau die Ersetzung vorgenommen werden muss, sieht man links. Man benutzt die Ableitung von z.

$$\int (5x-21)^8 dx = \int z^8 dx$$

$$= \int z^8 \frac{dz}{5} = \int \frac{1}{5} z^8 dz$$

$$= \frac{1}{5}\int z^8 dz$$

Nun kann man das Ausgangsintegral umformulieren.

$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{9} z^9 + C = \frac{1}{45} z^9 + C$$

Die Umformulierung ist dann recht einfach zu berechnen.

$$= \frac{1}{45}(5x-21)^9 + C$$

Schlussendlich ist dann noch die Resubstitution auszuführen. Die Richtigkeit dieser Rechnung lässt sich mittels Ableitung des Terms links überprüfen.

Das obige Integral hätte man noch recht einfach durch schlaues Überlegen herausfinden können. Anders sieht es aber bei diesem Beispiel aus:

$$\int \sqrt{1-x^2}dx$$

$$x = \sin z$$

$$x' = \cos z = \frac{dx}{dz}$$

$$\Rightarrow dx = dz \cdot \cos z$$

$$\int \sqrt{1-x^2}dx$$

$$= \int \sqrt{1-\sin^2 z} \cdot dz$$

$$= \int \sqrt{\cos^2 z} \cdot \cos z dz$$

$$= \int \cos^2 z \cdot dz$$

$$= \frac{1}{2}\sin z \cdot \cos z + \frac{z}{2} + c$$

$$= \frac{1}{2}\sin z \cdot \sqrt{1-\sin^2 z} + \frac{z}{2} + c$$

$$= \frac{1}{2}x \cdot \sqrt{1-x^2} + \frac{\arcsin x}{2} + c$$

Nun ist das alles schon mysteriös genug, aber auch der Übergang von Spalte 2 zu Spalte 3 birgt ein Geheimnis, dass auf der nächsten Seite gelüftet wird.

Es muss nämlich das Integral mit partieller Integration und großem Geschick gebildet werden:

$$\int \cos^2 z \cdot dz$$
$$= \sin z \cos z - \int -\sin^2 z dz$$
$$= \sin z \cos z + \int \sin^2 z dz$$
$$= \sin z \cos z + \int \left(1 - \cos^2 z\right) dz$$
$$= \sin z \cos z + \int 1 dz - \int \cos^2 z dz$$
$$= \sin z \cos z + z - \int \cos^2 z dz$$

Was u und v bei der Integration oben sind, möge sich jeder selbst klarmachen. Man kann beides in den Freiraum unten schreiben.

Nun können wir die allererste Zeile von links mit dem Ergebnis unten gleichsetzen:

$$\int \cos^2 z \cdot dz = \sin z \cos z + z - \int \cos^2 z dz$$
$$2\int \cos^2 z \cdot dz = \sin z \cos z + z + c$$
$$\int \cos^2 z \cdot dz = \frac{1}{2} \sin z \cos z + \frac{z}{2} + c$$

Tadadataaaaaaaa! ☺

Aufgaben

Seiten 164–165	Zu erledigen bis	Hinweis
1		Rekursion = Definition durch sich selbst
2 b d e		Beispiele lesen!
3 b		
Seiten 167–174		Prickelwasser Entenwein kostet wenig und schmeckt fein. Aber Cato-Prickelwässer schmecken Ihnen zehnmal besser. Und machen Kopfweh! ... vergehen! Dafür Bauchweh entstehen!
1		
2		
7		
8		

Uneigentliche Integrale

Hierbei geht es um bestimmte Integrale, die sozusagen in eine Richtung offen, also unbegrenzt sind, aber trotzdem einen bestimmten, bzw. begrenzten Flächeninhalt haben. Das hört sich seltsam an, ist aber so. Grundsätzlich gilt folgende Gleichheit:

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{k\to\infty} \int_a^k f(x)dx$$
$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{k\to-\infty} \int_k^b f(x)dx$$

Bitte beachtet unbedingt die formale Definition auf Seite 177 im Buch!!!

Ein Beispiel

$$\int_2^\infty 17x^{-3}dx = \lim_{k\to\infty} \int_2^k 17x^{-3}dx = \lim_{k\to\infty}\left[-\frac{17}{2}x^{-2}\right]_2^k$$
$$= \lim_{k\to\infty}\left(-\frac{17}{2}k^{-2} - -\frac{17}{2}2^{-2}\right) = \lim_{k\to\infty}\left(-\frac{17}{2k^2} + \frac{17}{2\cdot 2^2}\right)$$

Erstaunlich, oder?

$$= \lim_{k\to\infty}\left(-\frac{17}{2k^2} + \frac{17}{8}\right) = 0 + \frac{17}{8} = \frac{17}{8}$$

Aufgaben

Seiten 177–178	Zu erledigen bis	Hinweis
1		Entenwein, das schmeckt fein, soll's ein Prickelwasser sein.
5		
6		

Um angesichts dieser schwierigen Dinge etwas Aufheiterung zu produzieren, hier ein Bild mit modernen Verkehrswegen: