Exponentialfunktionen und die Eulersche Zahl e

→ Buch, S. 180–238

Der Nutzen der Eulerschen Zahl

Problem

Exponentialfunktionen wie	$f(x)=2^x$	$g(x)=3^x$
müssen schwierig mit dem Differentialquotienten abgeleitet werden.	$f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{2^{x+h}-2^x}{h}$	$g'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{3^{x+h}-3^x}{h}$
Die Resultate sehen nicht sehr erbaulich aus:	$f'(x)=0,6931471806\cdot 2^x$	$g'(x)=1,098612289\cdot 3^x$

Lösung: Die Eulersche Zahl und der natürliche Logarithmus

Es existiert eine Zahl e, für die gilt:

$$f(x)=e^x$$
$$\Rightarrow f'(x)=e^x$$
$$\Rightarrow f''(x)=e^x$$

Sie heißt **Eulersche Zahl**, ihr Wert ist $e = 2,718281828459...$

Der **natürliche Logarithmus** ist so definiert: $\ln x=\log_e x$

Nun kann man gemäß der Logarithmen-Gesetze jede beliebige Exponentialfunktion umschreiben:

Beispiele:
$$f(x)=2^x=e^{x\cdot\ln 2}$$
$$g(x)=3^x=e^{x\cdot\ln 3}$$

Ableitung und Integration komplexerer e-Funktionen

Steht im Exponent etwas anderes als x, muss man die Kettenregel anwenden:

$$f(x)=e^{2x+5} \qquad g(x)=e^{9x^2}$$
$$f'(x)=2e^{2x+5} \qquad g'(x)=18xe^{9x^2}$$

Bei weiteren Ableitungen ist dann ggf. auch die Anwendung der Produktregel vonnöten.
Bei der Integration müssen Substitution und Produktintegration eingesetzt werden.

Beispiele

$$h(x)=3^x=e^{x\ln 3}$$
$$h'(x)=\ln 3\cdot e^{x\ln 3}$$
$$\int 3^x dx=\int e^{x\ln 3}dx=\frac{1}{\ln 3}e^{x\ln 3}+c$$

$$g(x)=7\cdot 4^{2x+6}=7\cdot e^{(2x+6)\ln 4}$$
$$g'(x)=2\ln 4\cdot 7\cdot e^{(2x+6)\ln 4}=14\ln 4\cdot e^{(2x+6)\ln 4}$$
$$\int(7\cdot 4^{2x+6})dx=\int 7\cdot e^{(2x+6)\ln 4}dx=\frac{7}{2\ln 4}e^{(2x+6)\ln 4}+c$$

Die Stammfunktion von $\frac{1}{x}$

Die Stammfunktion von $f(x)=\frac{1}{x}$ lässt sich mit bekannten Methoden nicht bestimmen. Mithilfe einer einfachen, aber trickreichen Rechnung kommt man zu einer erstaunlichen Erkenntnis:

$e^{\ln x}=x$	|ableiten
$(\ln x)'e^{\ln x}=1$	|Die Ableitung von $\ln x$ sei noch nicht bekannt.
$(\ln x)'x=1$	|$\cdot x$
$(\ln x)'=\frac{1}{x}$	

Nun kennen wir also die Ableitung von $\ln x$, somit auch die Stammfunktion von $\frac{1}{x}$!

$$\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$$

Ein Werkzeug für Grenzwertberechnungen: Die Regel von l'Hospital

Wenn man die verdrießliche Situation hat, dass man den Grenzwert einer Funktion ausrechnen soll, die sich als Bruch schreiben lässt, $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ und dieser Grenzwert zunächst nicht zu bestimmen ist, weil sowohl $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, als auch $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ sind (unabdingbare Voraussetzung), dann gilt die Regel von l'Hospital:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

Weitere (nicht sehr aufregende) Voraussetzungen für diese Regel: Siehe Seite 205 unten.

Rechts sieht man ein Bild von
Guillaume François Antoine, Marquis de L'Hospital

Die Regel hat er aber von Johann Bernoulli übernommen. Aber nach diesem sind schon die Bernoulli-Ketten benannt.

Logarithmusfunktionen

→ Siehe Buch, S. 240–270

Die natürliche Logarithmusfunktion

In diesem Kapitel wird es in erster Linie um die natürliche Logarithmusfunktion und ihre Variationen gehen.

$$f(x) = \ln x$$

Diese Funktion ist die Umkehrfunktion von $g(x) = e^x$. Sie ist nur für positive Zahlen definiert (warum?).

Für den natürlichen Logarithmus gelten die bekannten Logarithmengesetze:

$$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$$
$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$
$$\ln\left(a^b\right) = b \cdot \ln a$$

Die Ableitung

Die Ableitung der natürlichen Logarithmusfunktion lautet $f'(x) = \frac{1}{x}$

Das unbestimmte Integral

Das unbestimmte Integral der natürlichen Logarithmusfunktion lautet

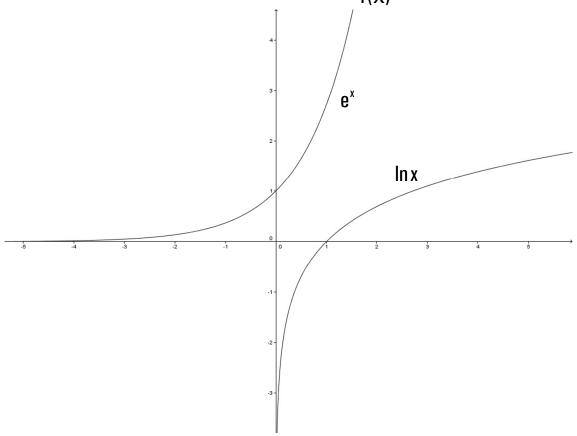
$$\int (\ln x)dx = \ln x - x + C$$

Dieses Integral kann relativ einfach mit der partiellen Integration hergeleitet werden. Siehe Seite 246.

Logarithmische Integration

Neben der einfachen, schon bekannten Integration $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$

gibt es auch eine verallgemeinerte logarithmische Integration: $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C$



Aufgaben

Seiten 182–192: Grundelegendes	Zu erledigen bis	Hinweis
2		Wiederholung aus der E
16 b d f h		Immer in e-Funktion umwandeln.
17 c d		

Seiten 193–210: Ableiten & Integrieren	Zu erledigen bis	Hinweis
1		Wertemenge = mögliche Funktionswerte
23 b c d		offenbar geht es um l'Hospital
29 a und 30 c		Immer auf die Ableitungsregeln achten!
31		Zu d) Skizze zeichnen!
32		So ähnlich wie in der Klausur
38		Nach einfachen Punkten suchen!

Seiten 211–227: Kurvendiskussionen	Zu erledigen bis	Hinweis
11		Beispiel beachten!
27		sehr ausführlich
34		ebenso

Seiten 231–235: Anwendungen	Zu erledigen bis	Hinweis
1		Beispiele lesen!
7		Struktur der Gleichungen studieren.
9		Quotientenbildung: Benachbarte Werte durcheinander teilen.

Seiten 243–249: ln-Funktionen	Zu erledigen bis	Hinweis
5 a b c d e		
13 a c e		

Seite 254: Normale	Zu erledigen bis	Hinweis
8		

Seite 258–263: Diverses	Zu erledigen bis	Hinweis
1		
6		
12		