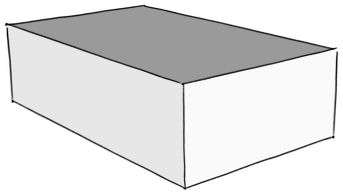
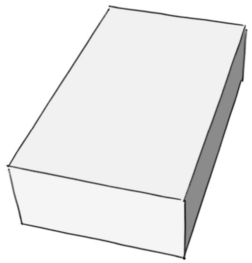
Lineare Abbildungen

→ Q2-Buch S. 230–268

Mit 3D-Programmen wie z.B. Trimble SketchUp (kostenlos) kann man sehr einfach 3D-Modelle erstellen und sie drehen, verschieben etc. Dabei berechnet der Computer u.a, wo auf dem Bildschirm die einzelnen Ecken zu sehen sein müssen.





Man sollte sich zur Würdigung dieser Leistung einmal bewusst machen, dass wir hier zwar einen Quader sehen, aber tatsächlich nur jeweils drei recht seltsame Vierecke aneinander gezeichnet sind. Die Berechnungen, die notwendig sind, um aus dem Modell eines Quaders die notwendigen Vierecke zu produzieren, sind lineare Abbildungen, die über Matrizen realisiert werden.
→ Bitte Beispiele auf den Seiten 255–258 durcharbeiten!

Definitionen

Lineare Abbildung

Eine Zuordnung f vom n-dimensionalen in den m-dimensionalen Raum $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ($m = n$ ist erlaubt) heißt **lineare Abbildung** (oder **lineare Transformation)**, wenn gilt:

1. f ordnet *jedem* Punkt P aus $\mathbb{R}^n$ *genau einen* Punkt P' aus $\mathbb{R}^m$ zu.
2. Es existiert eine $m \times n$-Matrix A (die so genannte **Abbildungsmatrix)**, so dass für die Ortsvektoren von P und P' gilt: $A \cdot \vec{p} = \vec{p}\,'$.

Bildmenge

Die Menge aller Bildpunkte einer linearen Abbildung heißt **Bildmenge.**

Kern

Die Menge der Punkte, die auf den Nullpunkt abgebildet werden, heißt **Kern.**

Fixpunktmenge

Die Menge derjenigen Punkte, die auf sich selber abgebildet werden, heißt **Fixpunktmenge.**

Satz von der Geradentreue

Eine jede lineare Abbildung bildet eine Gerade entweder auf eine Gerade oder einen Punkt ab.

Beweis

1. Jede lineare Abbildung ist **homogen,** d.h. sie bildet Vielfache eines Vektors $\vec{v}$ auf Vielfache des Bildvektors $\vec{v}\,'$ ab: $A \cdot \left(r \cdot \vec{v}\right) = r \cdot \left(A \cdot \vec{v}\right) = r \cdot \vec{v}\,'$. Hier ist r eine reelle Zahl.
2. Jede lineare Abbildung ist **additiv**, d.h. die Summe zweier Vektoren $\vec{v} + \vec{w}$ wird auf die Summe ihrer Bildvektoren $\vec{v}\,' + \vec{w}\,'$ abgebildet: $A \cdot \left(\vec{v} + \vec{w}\right) = A \cdot \vec{v} + A \cdot \vec{w} = \vec{v}\,' + \vec{w}\,'$.
3. Somit gilt für eine Gerade $g: \vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{m}$:
   $A \cdot \left(\vec{p} + r \cdot \vec{m}\right) = A \cdot \vec{p} + r \cdot A \cdot \vec{m} = \vec{p}\,' + r \cdot \vec{m}\,'$
   Falls $\vec{m}\,' = \vec{O}$ ist, wird g auf einen Punkt abgebildet, ansonsten auf eine Gerade.

Eigenvektoren und Eigenwerte

Definition Eigenvektor

Sei A eine Abbildungsmatrix einer linearen Abbildung. Dann ist $\vec{v}$ ein **Eigenvektor** von A, sofern eine reelle Zahl λ existiert, so dass gilt:

$$A \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}$$

Es gilt natürlich $\vec{v} \neq \vec{O}$. Das wäre sonst zu billig.

Definition Eigenwert

Sei $\vec{v}$ ein Eigenvektor von A. Dann heißen die zu $\vec{v}$ gehörenden Parameterwerte λ **Eigenwerte** von A.

Aufgaben

	Seite, Übung	Zu erledigen bis	☺	😐	☹
Basis	259 ◆ 1				
	259 ◆ 2				
	259 ◆ 3				
Vertiefung	259 ◆ 5				
	259 ◆ 6				
	259 ◆ 7				
Festigen	260 ◆ 12				
	260 ◆ 13				

	Seite, Übung	Zu erledigen bis	☺	😐	☹
Eigen…	267 ◆ 15				
	267 ◆ 16				
	267 ◆ 18				
Schwierig	268 ◆ 20				
	268 ◆ 22				
	268 ◆ 24				

Determinanten

Eine Determinante ist eine **Zahl,** die einer Matrix zugeordnet ist. Jede Matrix hat eine Determinante. Der Wert der Determinante gibt bestimmte Informationen über die Matrix, bzw. das zugehörige LGS.

Determinanten lassen sich grundsätzlich nur von quadratischen $m\times m$-Matrizen berechnen.

Berechnung von Determinanten

Determinante einer 2×2-Matrix

Gegeben ist die Matrix $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Dann ist $\boxed{\det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$

Man sieht, dass das Produkt der Diagonalen von links oben nach rechts unten minus das Produkt der Diagonalen von rechts oben nach links unten berechnet wird.

Determinante einer 3×3-Matrix

Gegeben ist die Matrix $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Nun definieren wir A_{ij} als jene Matrix, bei der aus A die i-te Zeile und die j-te Spalte gestrichen wurde.

Beispiel: $A_{23}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$

Dann ist eine Möglichkeit, die Determinante zu berechnen:

$$\boxed{\det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot\det(A_{11})-a_{12}\cdot\det(A_{12})+a_{13}\cdot\det(A_{13})}$$

Dies wäre die Entwicklung der Determinante nach der ersten Zeile. Es ist ohne weiteres möglich, die Determinante nach jeder beliebigen Zeile zu entwickeln:

$$\det(A)=-a_{21}\cdot\det(A_{21})+a_{22}\cdot\det(A_{22})-a_{23}\cdot\det(A_{23})$$
$$\det(A)=a_{31}\cdot\det(A_{31})-a_{32}\cdot\det(A_{32})+a_{33}\cdot\det(A_{33})$$

Auch die Entwicklung nach einer beliebigen Spalte ist möglich. Man sieht, dass mit den Vorzeichen etwas passiert. Dies führt uns zur allgemeinen Formel für die Determinante einer 3×3-Matrix…

Allgemeine Formel für die Determinante einer 3×3-Matrix

Entwicklung nach der i-ten Zeile:
$$\det(A)=(-1)^{i+1}\cdot a_{i1}\cdot\det(A_{i1})+(-1)^{i+2}\cdot a_{i2}\cdot\det(A_{i2})+(-1)^{i+3}\cdot a_{i3}\cdot\det(A_{i3})$$

Entwicklung nach der j-ten Spalte:
$$\det(A)=(-1)^{1+j}\cdot a_{1j}\cdot\det(A_{1j})+(-1)^{2+j}\cdot a_{2j}\cdot\det(A_{2j})+(-1)^{3+j}\cdot a_{3j}\cdot\det(A_{3j})$$

Selbstverständlich ist es völlig egal, nach welcher Spalte/Zeile man die Determinante entwickelt!

Für die Berechnung der Determinante einer 3×3-Matrix gibt es eine Merkhilfe, die so genannte **Regel von Sarrus**
→ siehe Aufgaben.

Determinante einer m×m-Matrix (Laplace'scher Entwicklungssatz)

Die Formeln für 3×3-Matrizen kann man auf beliebige $m\times m$-Matrizen übertragen:

Entwicklung nach der i-ten Zeile: $\det(A)=\sum_{j=1}^{m}(-1)^{i+j}\cdot a_{ij}\cdot\det(A_{ij})$

Entwicklung nach der j-ten Spalte: $\det(A)=\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+j}\cdot a_{ij}\cdot\det(A_{ij})$

Anmerkung: Da man je nach Größe der Matrix recht viele Determinanten von Teilmatrizen ausrechnen muss, ist die Berechnung einer Determinante bisweilen recht aufwendig. Es lohnt, dafür einen Computer zu benutzen!

Determinanten, Invertierbarkeit und lineare Gleichungssysteme

Satz

Eine $m\times m$-Matrix ist genau dann invertierbar und damit (streng) quadratisch, wenn $\det(A)\neq 0$.
Daraus folgt unmittelbar, dass ein LGS mit der Koeffizientenmatrix A genau dann eindeutig lösbar ist, wenn $\det(A)\neq 0$.

Cramer'sche Regel

Ein lineares Gleichungssystem mit n Unbekannten und n Gleichungen lässt sich ja so aufschreiben:

$$\begin{matrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n \end{matrix}\quad \text{Matrixschreibweise: } A\vec{x}=\vec{b}\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11}x_1 & a_{12}x_2 & \ldots & a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 & a_{22}x_2 & \ldots & a_{2n}x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & a_{n2}x_2 & \ldots & a_{nn}x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Hierbei ist vorausgesetzt, dass $\det(A)\neq 0$, dass also die Koeffizientenmatrix invertierbar ist.

Dann gibt es eine eindeutige Lösung des LGS, repräsentiert durch den Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$,

dabei gilt für die Komponenten dieses Vektors $x_i = \dfrac{\det(A_i)}{\det(A)}$

Die Matrix A_i ist dabei definiert durch: $A_i = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(i-1)} & b_1 & a_{1(i+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2(i-1)} & b_2 & a_{2(i+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(i-1)} & b_n & a_{n(i+1)} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Anmerkung: Die Cramer'sche Regel bedeutet nicht automatisch, dass die Berechnung der Lösung eines LGS schneller geht als z.B. mit dem Gauß'schen Eliminationsverfahren. Im Gegenteil – schon bei einem LGS mit einer 20×20-Koeffizientenmatrix wird die Berechnung der Lösung mit Cramer unsere Lebenszeit um Einiges übersteigen. Mit Gauß schaffen wir es locker noch heute.

Determinanten und Flächen/Volumina

Determinanten lassen sich dafür benutzen, Flächen und Volumina zu berechnen.

Die Fläche eines Parallelogramms

Angenommen, ein Parallelogramm wird von den Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ aufgespannt.

Dann gilt für die Fläche des Parallelogramms: $F = \left| \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \right|$

Das Volumen eines Spats

Angenommen, ein Spat (Körper, dessen Seiten Parallelogramme sind) wird von den Vektoren

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ aufgespannt.

Dann gilt für das Volumen des Spats: $V = \left| \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \right|$

Man mache sich den Spezialfall „Rechteck" und den Spezialfall „Quader" klar!

So, nun ist die Schulmathematik aber wirklich zu Ende!

Aufgaben

1. Berechne die Determinanten der folgenden Matrizen.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} -2 & s & 4 \\ -1 & 3 & 0 \\ s & 0 & 2 \end{pmatrix}$

2. Recherchiere die *Regel von Sarrus* und ermittle mit deren Hilfe die Determinanten der folgenden Matrizen.

$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & -5 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 6 \\ 4 & 5 & 3 \\ 8 & -2 & -7 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & -1 \\ 5 & 9 & -2 & 6 \\ -5 & 3 & 5 & 8 \\ 9 & -7 & 9 & 3 \end{pmatrix}$

3. Ermittle auf dem kürzesten Weg die Determinanten der folgenden Matrizen.

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 9 & 85 & 17 \\ 0 & -21 & 81 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 8 & -5 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 6 \\ 3 & 1{,}5 & 3 & 9 \\ -1 & 0 & 2 & 8 \end{pmatrix}$

4. Prüfe mithilfe von Determinanten die folgenden Matrizen auf Invertierbarkeit.

$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 25 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -8 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

5. Löse die folgenden Gleichungssysteme mithilfe von Determinanten. Prüfe zunächst auf eindeutige Lösbarkeit.

a) $\begin{aligned} 3x + y - 2z &= 16 \\ -x + 5y + 6z &= 0 \\ 5x - 2y + z &= -1 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} -x + 11y + 2z &= 21 \\ 6x - 2y - z &= -16 \\ -4x + 3y - z &= -6 \end{aligned}$

6. Berechne jeweils die Fläche des Parallelogramms, das durch die angegebenen Vektoren aufgespannt wird.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} r \\ 6 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} -r \\ 1 \end{pmatrix}$

7. Berechne jeweils das Volumen des Spats, der von den angegebenen Vektoren aufgespannt wird.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$

Determinanten – Lösungen

1. $\det(A)=10$ $\det(B)=1$ $\det(C)=0$ $\det(D)=-10s-12$

2. $\det(A)=1$ $\det(B)=-491$ $\det(C)=4696$

3. Alle Determinanten = 0 A: Nullzeile, B: Zwei gleiche Zeilen C: II und III kollinear

4. $\det(A)=-2$ → invertierbar $\det(B)=0$ → n.i. $\det(C)=-1$ → i. $\det(D)=0$ → n.i.

5. a) $x=2$ $y=4$ $z=-3$ b) $x=-1$ $y=0$ $z=10$

6. a) $F=6$ b) $F=10$ c) $F=7r$ $(r>0)$

7. a) $V=1$ b) $V=140$