Ober- und Untersummen

➔ siehe auch S. 12–15 im Buch.

Ober- und Untersummen sind ein Werkzeug dafür, den **Flächeninhalt** unter einem Funktionsgraphen auf einem gewissen Intervall annäherungsweise mit bestimmen. Dabei gilt per Definition:

Untersumme < tatsächlicher Flächeninhalt < Obersumme

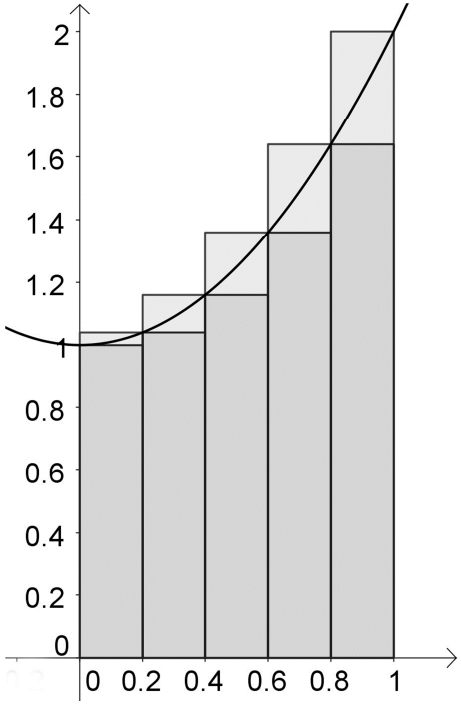
Beispiel

Es sollen Ober- und Untersumme zur Funktion $f(x) = x^2 + 1$ auf dem Intervall $[0;1]$ bei fünf Segmenten (Streifen) berechnet werden. Die Resultate sind:

$$\begin{aligned} O_5 &= \text{Streifenbreite} \cdot \left(f(0,2) + f(0,4) + f(0,6) + f(0,8) + f(1)\right) \\ &= 0,2 \cdot (1,04 + 1,16 + 1,36 + 1,64 + 2) \\ &= 1,44 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_5 &= \text{Streifenbreite} \cdot \left(f(0) + f(0,2) + f(0,4) + f(0,6) + f(0,8)\right) \\ &= 0,2 \cdot (1 + 1,04 + 1,16 + 1,36 + 1,64) \\ &= 1,24 \end{aligned}$$

- Wie man sieht, unterscheiden sich Ober- und Untersumme nur in einem einzigen Eintrag ($f(1)$, bzw. $f(0)$).
- Man beachte, dass man die Funktionswerte in der Klammer anders hätte wählen müssen, würde der Graph auf dem Intervall bergab verlaufen.



Aufgabe 4

Bestimme jeweils die Ober- und Untersumme O_5 und U_5 für die angegebene Funktion auf dem angegebenen Intervall.

a) $a(x) = -x^2 + 4$ $[0;2]$
b) $b(x) = x^3$ $[1;2]$
c) $c(x) = 2x + 3$ $[0;5]$
d) $d(x) = 3x$ $[0;z]$
e) $e(x) = x^2$ $[0;z]$
f) $f(x) = 4x^3$ $[0;z]$

Ober- und Untersummen mit n und unendlich vielen Streifen

Um die Genauigkeit zu erhöhen. kann man die Streifenanzahl n nennen und dieses n gegen Unendlich laufen lassen. Das bewirkt natürlich, dass die einzelnen Streifen immer schmaler werden, nämlich
Breite des Intervalls geteilt durch n.

Beispiel: Obersumme O_n für $f(x) = x^2$ auf $[0;1]$

$$\begin{aligned} O_n &= \frac{1}{n} \cdot \left(\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{n}{n}\right)^2 \right) \\ &= \frac{1}{n^3} \cdot \left(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2\right) \end{aligned}$$

Das ist ja nun sehr toll, aber was sollen wir mit dem Ausdruck in der Klammer anfangen?
Hier ist nun der Zeitpunkt für einen Exkurs gekommen.

Exkurs: Summenformeln

Als der kleine Carl Friedrich Gauß (später ein großer Mathematiker) in der Schule die Aufgabe bekam, die Summe aller Zahlen von 1 bis 100 zu berechnen, sah er kurz seinen Mitschülern zu, wie sie tatsächlich 1+2+3+4+... usw. rechneten, dachte etwas nach, kritzelte ein wenig herum und kam dann sehr schnell auf die Lösung: 5050. Wie hat er das gemacht? Nun, ihm fiel auf, dass wenn man die Zahlen von 1 bis 100 auf eine bestimmte Weise aufschreibt, die Summe der beiden untereinander stehenden Zahlen immer 101 ist:

	1	2	3	4	5	6	...	44	45	46	47	48	49	50
+	100	99	98	97	96	95	...	57	56	55	54	53	52	51
=	101	101	101	101	101	101	...	101	101	101	101	101	101	101

Da es offenbar exakt 50 Pärchen gibt, musste er nur noch rechnen: $50 \cdot 101 = 5050$

Einen ähnlichen Zusammenhang gibt es bei allen Summen von 1 bis zu einer anderen beliebigen natürlichen Zahl.

Daher kam man auf die Formel: $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n}{2} \cdot (n+1) = \frac{n(n+1)}{2}$
Sie gilt tatsächlich immer. Man kann es für jede beliebige Zahl ausprobieren.

Für andere Summen gibt es ebenfalls Summenformeln. Hier zwei, die wir brauchen:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Mit der zweiten eben vorgestellten Summenformel können wir die Obersumme nun gut berechnen:

$$O_n = \frac{1}{n}\cdot\left(\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{n}{n}\right)^2\right) = \frac{1}{n^3}\cdot\left(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2\right)$$

$$= \frac{1}{6n^3}n(n+1)(2n+1) = \frac{1}{6}\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\frac{2n+1}{n}$$

Jetzt kann man n gegen Unendlich laufen lassen:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{6}\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\frac{2n+1}{n}\right) = \left(\frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2\right) = \frac{1}{3}$$

Das ist nun der Grenzwert der Obersumme und damit der exakte Flächeninhalt.

Aufgabe 5

Berechne die Untersumme zu der Funktion und dem Intervall aus dem Beispiel. Schau dir dazu die Berechnung der Obersumme genau an und überlege, was für die Untersumme geändert werden muss.

Aufgabe 6

Bestimme den Grenzwert der Ober- oder Untersumme der folgenden Funktionen auf dem angegebenen Intervall.

a) $a(x) = x + 1$ [0;1]
b) $b(x) = x^2$ [0;10]
c) $c(x) = 2x^2 + x$ [0;1]
d) $d(x) = x^2$ [0;z]
e) $e(x) = 3x^2$ [0;z]

Bei den Resultaten zu d und e sollte etwas auffallen. Versuche, einen Verdacht zu formulieren, wie man von der Funktion schnell zum Flächeninhalt kommen kann.

Stammfunktionen und unbestimmte Integrale

Stammfunktionen

Definition: Jede differenzierbare Funktion F, für die $F' = f$ gilt, heißt **Stammfunktion** von f.

→ Seite 28ff im Buch.

Achtung!
Es gibt den Vorgang des **Ableitens**, der auch **Differenzieren** genannt wird, aber der Prozess in die Gegenrichtung heißt **Integrieren**. Die Benutzung des Wortes **Aufleiten** ist nicht gestattet. Wer es doch versucht, wird Ziel kolossalen Zorns und wandert lieber nach Timbuktu aus.

Aufgabe 7

Stelle fünf verschiedene Stammfunktionen der Funktion $f(x) = 12x^5 - 9x^2 + 1$ auf.

Unbestimmte Integrale

Definition: Die Menge aller Stammfunktionen einer Funktion f wird als unbestimmtes Integral bezeichnet.
Schreibweise: $\int f(x)dx$

Beispiel
$\int (8x^3 - 3x^2)dx = 2x^4 - x^3 + c$

Das c am Ende wird als Stellvertreter für alle denkbaren Konstanten geschrieben.

Aufgabe 8

- Mache dir an Beispielen die Rechenregeln auf Seite 31 klar. Notiere eventuelle Fragen/Unklarheiten.
- Bearbeite folgende Übungen auf den Seiten 30 bis 33:

Seiten 30–33	Zu erledigen bis	Hinweise
1		x^{-3} und dergleichen kann hilfreich sein.
2		Hier geht es um das c.
3 b g i k (andere freiwillig)		Bei k den Bruch anders schreiben, dann geht es.
5		Ggf. auch wieder Terme umschreiben.
6		Beim Offensichtlichen beginnen.

Das bestimmte Integral

Obacht: Ein bestimmtes Integral ist etwas grundlegend anderes als ein unbestimmtes, auch wenn sich beide äußerlich sehr ähneln. Während ein unbestimmtes Integral letztlich eine Menge an Funktionen ist, kann man ein bestimmtes Integral ausrechnen, das Ergebnis ist grundsätzlich ein Zahlenwert.

Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Dieser Satz begegnet, je nachdem, wo man nachschaut, in ganz unterschiedlicher Darstellung. Mit den mannigfaltigen Darstellungen im Buch bin ich nicht glücklich. Folgendes könnt und sollt ihr euch fast ohne Einschränkung merken. Es hat für uns den Status einer **Definition.**

Das bestimmte Integral der Funktion f auf dem Intervall [a;b] berechnet man so:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)}$$

Voraussetzung ist lediglich, dass f differenzierbar ist (dass man also den Differentialquotienten bilden kann).

Beispiel

$f(x) = 2x^3 - 8 \quad \Rightarrow \quad F(x) = 0{,}5x^4 - 8x$

$$\int_{-1}^{4}\left(2x^3 - 8\right)dx = \underbrace{\left(0{,}5\cdot 4^4 - 8\cdot 4\right)}_{F(4)} - \underbrace{\left(0{,}5\cdot(-1)^4 - 8\cdot(-1)\right)}_{F(-1)} = 96 - 8{,}5 = \underline{\underline{87{,}5}}$$

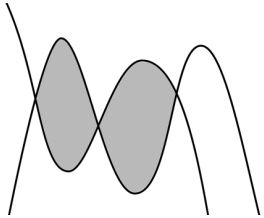
Weitere Aufgaben

1. Auf Seite 41 findest du Rechenregeln für bestimmte Integrale. Mache dir jede Regel klar, indem du ein konkretes Beispiel deiner Wahl durchrechnest.
2. Zur Übung:

Seiten 40–41	**Zu erledigen bis**	**Hinweise/eigene Notizen**
5		Verkürzt oder unverkürzt ist mir völlig egal. Auf Variable achten!
6		Erst zusammenfassen, dann berechnen!
Seite 42		
4		Zunächst das Integral mit a vollständig berechnen!

Flächenberechnungen

→ Buch, Seiten 44–68



Die Fläche zu berechnen, die zwischen zwei Funktionsgraphen eingeschlossen ist, läuft immer gleich ab. Die folgende Anleitung ist daher für integrierbare Funktionen ohne mir bekannte Einschränkungen allgemeingültig.

Anleitungen zur Berechnung von Flächen…

zwischen einem Funktionsgraph und der x-Achse	**zwischen zwei Funktionsgraphen:**
Erster Schritt Sofern ein Intervall gegeben ist: Untersuchen, ob es innerhalb des Intervalls Nullstellen gibt. Falls kein Intervall gegeben ist: Alle Nullstellen berechnen.	**Erster Schritt** Sofern ein Intervall gegeben ist: Untersuchen, ob es innerhalb des Intervalls Schnittstellen zwischen den Funktionen gibt. Falls kein Intervall gegeben ist: Alle Schnittstellen berechnen.
Zweiter Schritt Die einzelnen bestimmten Integrale $\int_a^b f(x)dx$ zwischen benachbarten Nullstellen, bzw. zwischen Intervallgrenzen und den nächstgelegenen Nullstellen berechnen. Ggf. Symmetrie ausnutzen!!!	**Zweiter Schritt** Die einzelnen bestimmten Differenz-Integrale $\int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)dx$ zwischen benachbarten Schnittstellen, bzw. zwischen Intervallgrenzen und den nächstgelegenen Schnittstellen berechnen. Ggf. Symmetrie ausnutzen!!!
Dritter Schritt Die Beträge der einzelnen Integrale bilden (also ggf. das Minus entfernen). Die Beträge addieren. Fertig.	**Dritter Schritt** Die Beträge der einzelnen Integrale bilden (also ggf. das Minus entfernen). Die Beträge addieren. Fertig.

Aufgaben

Seiten 47–54	**Zu erledigen bis**	☺	😐	☹
1 b				
2 b				
5				
10 c				
20				

Seiten 57–67	**Zu erledigen bis**	☺	😐	☹
3				
6 a				
15 b				
17 a				
27 b				

Rotationskörper

→ Buch, Seiten 70–75

Man kann das Volumen von Objekten, deren Randform sich durch einen Funktionsgraph gut annähern lässt und die eine kreisförmige Grundfläche haben, (z.B. Flaschen, Gläser, Zeppeline, Vuvuzelas), recht einfach mithilfe von bestimmten Integralen berechnen:

Das Volumen des Körpers, der entsteht, wenn man den Graph einer Funktion $f(x)$ auf dem Intervall $[a;b]$ um die x-Achse rotieren lässt, lässt sich so berechnen:

$$V = \pi\int_a^b (f(x))^2 dx$$

$f(x)$ muss dabei differenzierbar und nicht negativ sein (also keine Abschnitte des Graphen unter der x-Achse)

Die einschränkende Bedingung kann man natürlich notfalls umgehen, indem man Nullstellen berechnet, Beträge bildet, Graphen spiegelt usw.

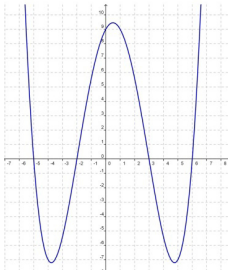
Aufgaben

Seiten 71–75	Zu erledigen bis	Hinweise
1		Man achte auf die Beschriftung!
2		Finde ihn!
3		Beispiel lesen und Formel ggf. nachschlagen.
5 cd		Umkehrfunktion...
12		Auf die Achsen achten. Zylinderformel nachschlagen.

Eine weitere Anwendung von Integralen

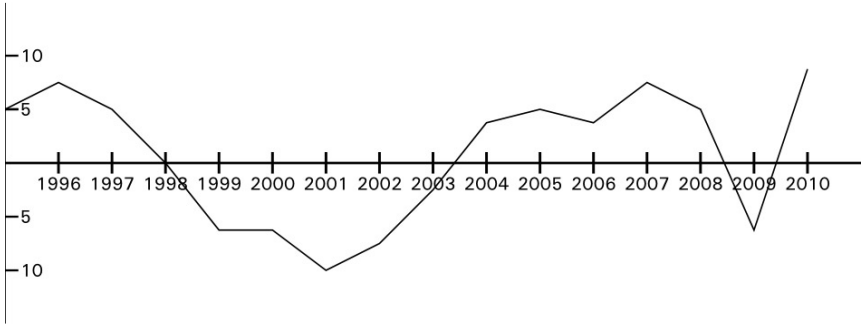
Neben zahlreichen Anwendungen in der Physik, von der euer Mathelehrer leider keine Ahnung hat und vor der er sich immer gerne drückt, gibt es noch ganz erstaunlich nützliche Verwendungsgebiete für Integrale.

Zueignungsaufgabe



Zwei Schüler/innen diskutieren darüber, ob bei der Funktion $f(x) = \frac{1}{20}(x-6)(x-3)(x+2)(x+5)$, deren Graph sie gezeichnet haben (rechts) die Fläche über oder unter dem Graph größer ist.

- Mit welcher Berechnung kann man schnell herausfinden, was nun der Fall ist?
- Führe die Rechnung aus!
- Welche Zusatzinformation bietet das Ergebnis?



In der Grafik oben kann man die Gewinne und Verluste eines imaginären Unternehmens, nennen wir es „The Damn Curve Corporation“ in den letzten Jahren (in Millionen Euro) ablesen.

1. Nehmen wir mal an, der Graph oben könne mit irgendeinem Funktionsgraph angenähert werden – was für eine Sorte Funktion wäre das vermutlich?
2. Nun die fiese Frage, bei der man vielleicht wirklich schwer nachdenken muss: Wenn man nun das bestimmte Integral dieser Funktion ausrechnen würde – welchen Bezug hätte das zur Realität; über welche für den Geschäftsmann interessante Größe würde das Integral Auskunft geben?

Platz für Notizen etc:

Ableitungs-und Integrationsregeln

→ Buch S. 82–90

Die Produktregel

Funktionen, die sich als Produkt zweier anderer Funktionen auffassen lassen, muss man auf folgende Weise ableiten:

Allgemeine Regel

$f(x) = u(x) \cdot v(x)$

$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

Beispiel

$f(x) = 3x^2 \cdot \sin x$

$u(x) = 3x^2 \qquad v(x) = \sin x$

$u'(x) = 6x \qquad v'(x) = \cos x$

$f'(x) = 6x \cdot \cos x + 3x^2 \cdot \sin x$

Die Kettenregel

Funktionen, die sich als zwei ineinander verschachtelte Funktionen auffassen lassen, muss man folgendermaßen ableiten:

Allgemeine Regel

$f(x) = u(v(x))$

$f'(x) = v'(x) \cdot u'(v(x))$

Beispiel

$f(x) = (x^2 + 7x)^4$

$u(x) = v^4 \qquad v(x) = x^2 + 7x$

$u'(x) = 4v^3 \qquad v'(x) = 2x + 7$

$f'(x) = (2x + 7) \cdot 4 \cdot (x^2 + 7x)^3$

Korrekter Beweis: http://www.mathematik.uni-trier.de/ ~ mueller/AnalysisI-IV.pdf

Die Quotientenregel

Funktionen, die sich als Quotient zweier Funktionen auffassen lassen, muss man so ableiten:

Allgemeine Regel

$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$

$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$

Beispiel

$f(x) = \frac{5x^2}{\cos x}$

$u(x) = 5x^2 \qquad v(x) = \cos x$

$u'(x) = 10x \qquad v'(x) = -\sin x$

$f'(x) = \frac{10x \cdot \cos x - 5x^2 \cdot (-\sin x)}{(\cos x)^2}$

Die Kenntnis der Quotientenregel ist nur im LK verpflichtend, hat aber auch schon vielen GK-Schülern geholfen.

Alle Funktionen $u(x)$ und $v(x)$ auf dieser Seite müssen differenzierbar sein. Bei der Quotientenregel muss zusätzlich gelten: $v(x)$ darf nicht gleich konstant null sein (an einzelnen Stellen darf sie null sein, dann gibt es Definitionslücken).

Lineare Substitution der Integralrechnung

Mithilfe der Umkehrung der Kettenregel lassen sich gewisse schwierige Integrale berechnen:

Allgemeine Regel

$\int f(ax + b)dx$

$= \frac{1}{a} \cdot F(ax + b) + C$

Beispiel

$\int (4x + 3)^5 dx = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} \cdot (4x + 3)^6 = \frac{1}{24}(4x + 3)^6$

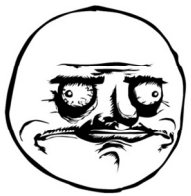
Vorsicht! Die lineare Substitution funktioniert nur, wenn in der Klammer ein linearer Ausdruck steht (also x ohne Exponent). Integralen wie $\int (4x^2 + 3)^5 dx$, bei denen in der Klammer ein quadratischer oder noch höhergradiger Ausdruck steht, kann man auf diese Weise nicht beikommen. Man kann die Klammer notfalls manuell ausmultiplizieren.

Aufgaben

Seiten 83–90		Zu erledigen bis	Hinweise
Produktregel	2 a d f		Nicht vereinfachen (ausmultiplizieren) bitte.
	8 b		
	9		
Kettenregel	5 a b c e f		
Lineare Substitution	13 a c d		
	14 a c		
	15		

Mathe-Kalauer

Ein Mathematiker hat einen neuen Beweis erstellt und will diesen nun als Bild in seinem Gästezimmer aufhängen. Es ist jedoch leider keiner da, der ihm das Bild aufhängen kann. Kurzentschlossen entscheidet er, das Bild selbst aufzuhängen und nimmt Leiter, Hammer und Nagel. Doch er setzt den Nagel mit dem Kopf zur Wand an. Da ihm dies seltsam vorkommt, kommt er zu dem Entschluss: „Dies ist ein Nagel für die gegenüberliegende Wand."



3 Mathematikstudenten und 3 Physikstudenten fahren Zug. Die Physikstudenten haben 3 Fahrkarten, die Mathematiker nur eine. Als der Schaffner in die Nähe kommt, gehen die drei Mathematiker auf eine Toilette, dieser klopft, die Fahrkarte wird unter der Tür durchgeschoben und abgestempelt zurückgeschoben. Bei der nächsten Zugfahrt haben die Physiker auch nur eine Fahrkarte gekauft, die Mathematikstudenten jedoch gar keine. Bei Herannahen des Schaffners gehen die Physiker auf eine Toilette, die Mathematiker auf die andere. Kurz bevor der Schaffner bei den Toiletten angekommen ist, geht einer der Mathematiker zu der anderen Toilette, klopft, und bittet um die Fahrkarte ...

Exponentialfunktionen und die Eulersche Zahl e

→ Buch, S. 92–148

Der Nutzen der Eulerschen Zahl

Problem

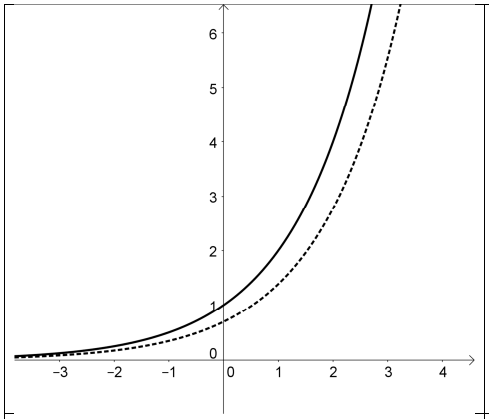
Exponentialfunktionen wie $f(x) = 2^x$ $g(x) = 3^x$

müssen schwierig mit dem Differentialquotienten abgeleitet werden.

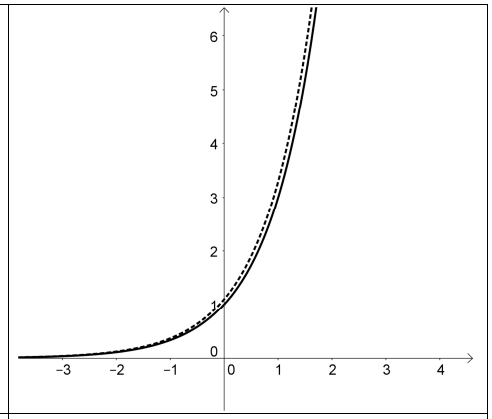
$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{2^{x+h} - 2^x}{h} \qquad g'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{3^{x+h} - 3^x}{h}$$

Die Resultate sehen nicht sehr erbaulich aus:

$$f'(x) = 0{,}6931471806 \cdot 2^x \qquad g'(x) = 1{,}098612289 \cdot 3^x$$



$f(x) = 2^x$ mit ihrer Ableitung
$f'(x) = 0{,}6931471806 \cdot 2^x$ (gestrichelt)



$g(x) = 3^x$ mit ihrer Ableitung
$g'(x) = 1{,}098612289 \cdot 3^x$ (gestrichelt)

Die wundervolle Lösung für das Problem: Die Eulersche Zahl und der natürliche Logarithmus

Es existiert eine Zahl e, für die gilt:

$$f(x) = e^x$$
$$\Rightarrow f'(x) = e^x$$
$$\Rightarrow f''(x) = e^x$$

Sie heißt **Eulersche Zahl**, ihr Wert ist $e = 2{,}718281828459\ldots$

Der **natürliche Logarithmus** ist so definiert: $\ln x = \log_e x$

Nun kann man gemäß der Logarithmen-Gesetze jede beliebige Exponentialfunktion umschreiben:

Beispiele: $f(x) = 2^x = e^{x\cdot\ln 2}$
$g(x) = 3^x = e^{x\cdot\ln 3}$

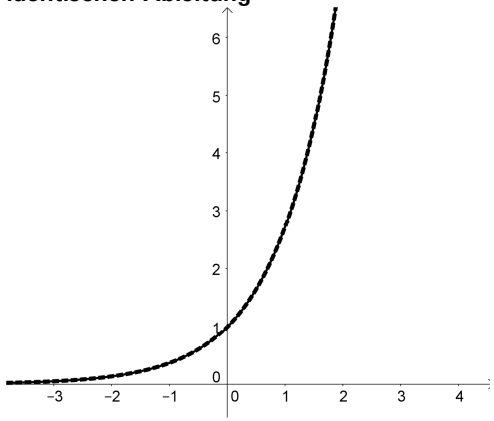
Ableitung und Integration komplexerer e-Funktionen

Steht im Exponent etwas anderes als x, muss man die Kettenregel anwenden:

$$f(x) = e^{2x+5} \qquad g(x) = e^{9x^2}$$
$$f'(x) = 2e^{2x+5} \qquad g'(x) = 18xe^{9x^2}$$

Bei weiteren Ableitungen ist dann ggf. auch die Anwendung der Produktregel vonnöten.

Graph der e-Funktion mit ihrer identischen Ableitung



Beispiele

$$h(x) = 3^x = e^{x\ln 3}$$
$$h'(x) = \ln 3 \cdot e^{x\ln 3}$$
$$\int 3^x dx = \int e^{x\ln 3}dx = \frac{1}{\ln 3}e^{x\ln 3} + c$$

$$g(x) = 7\cdot 4^{2x+6} = 7\cdot e^{(2x+6)\ln 4}$$
$$g'(x) = 2\ln 4\cdot 7\cdot e^{(2x+6)\ln 4} = 14\ln 4\cdot e^{(2x+6)\ln 4}$$
$$\int (7\cdot 4^{2x+6})dx = \int 7\cdot e^{(2x+6)\ln 4}dx = \frac{7}{2\ln 4}e^{(2x+6)\ln 4} + c$$

Die Stammfunktion von $\frac{1}{x}$

Die Stammfunktion von $f(x) = \frac{1}{x}$ lässt sich mit bekannten Methoden nicht bestimmen. Mithilfe einer einfachen, aber trickreichen Rechnung kommt man zu einer erstaunlichen Erkenntnis:

$e^{\ln x} = x$ | ableiten

$(\ln x)'e^{\ln x} = 1$ | Die Ableitung von lnx sei noch nicht bekannt.

$(\ln x)'x = 1$ | : x

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

Nun kennen wir also die Ableitung von $\ln x$, somit auch die Stammfunktion von $\frac{1}{x}$!

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$$

Aufgaben zu Exponentialfunktionen

Thema/Seiten	Aufgabe	Zu erledigen bis	Hinweis
Erinnerung S. 94	2		Wiederholung aus E-Phase
Ableitung und Integration S. 102f	10 f h j k m		Ableitungsregeln beachten!
	12		Entspannend
	13 c d g h		Falls nötig zunächst in e-Funktion umwandeln!
	14 b c		
Funktionsuntersuchungen S. 104–113	2		Gleichsetzen, aufräumen, ln.
	8		Sehne = Sekante = Gerade durch P & Q
	9		Ableitung...
	15		a herausfinden.
	18		Winkel in Steigung umrechnen...
Integrale & Flächen S. 114–118	1 a c		An +c denken!
	7 a		Die Skizze ist wichtig!
Komplexe Aufgaben S. 120–137	4 5 6		Sind zusammen eine Aufgabe.
	15		Abi-ähnlich, also Mühe geben.
	19		approximieren = annähern
	27		Nicht aufgeben!
	37		Zu e unbedingt Skizze erstellen!
Anwendungen S. 141–145	4		Gefährlich.
	9		Quotientenbildung: 100%/40,1% usw.
	11		Bei a: Abbaugleichung.

Q1 Mathematik GK Martin-Niemöller-Schule Stefan Krissel

Aufgaben zu Exponentialfunktionen

Thema/Seiten	Aufgabe	Zu erledigen bis	Hinweis
Erinnerung S. 94	2		Wiederholung aus E-Phase
Ableitung und Integration S. 102f	10 f h j k m		Ableitungsregeln beachten!
	12		Entspannend
	13 c d g h		Falls nötig zunächst in e-Funktion umwandeln!
	14 b c		
Funktionsuntersuchungen S. 104–113	2		Gleichsetzen, aufräumen, ln.
	8		Sehne = Sekante = Gerade durch P & Q
	9		Ableitung...
	15		a herausfinden.
	18		Winkel in Steigung umrechnen...
Integrale & Flächen S. 114–118	1 a c		An +c denken!
	7 a		Die Skizze ist wichtig!
Komplexe Aufgaben S. 120–137	4 5 6		Sind zusammen eine Aufgabe.
	15		Abi-ähnlich, also Mühe geben.
	19		approximieren = annähern
	27		Nicht aufgeben!
	37		Zu e unbedingt Skizze erstellen!
Anwendungen S. 141–145	4		Gefährlich.
	9		Quotientenbildung: 100%/40,1% usw.
	11		Bei a: Abbaugleichung.

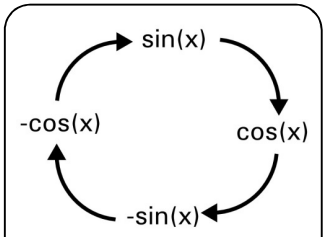
Exponentialfunktionen 3 mathe@steyvel.com

Trigonometrische Funktionen

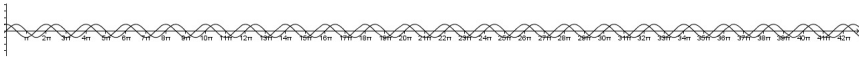
→ Buch S. 150–182

Voraussetzungen

- Schon bekannt sollten die **Definitionen** von Sinus, Kosinus und Tangens sowie die Umrechnung Gradmaß ↔ Bogenmaß auf Seite 150 im Buch sein.
- Ferner werden künftig die **Formeln und Theoreme** auf Seite 152 und ab Seite 26 im Tafelwerk von Bedeutung sein. Man muss sie nicht auswendig lernen, aber man sollte wissen, dass es sie gibt und wo sie stehen. Außerdem sollte man in der Lage sein, sie zu suchen und anzuwenden, bevor man resignierend behauptet, dass eine bestimmte Aufgabe nicht zu lösen sei.
- Der **Ableitungskreislauf** einfacher trigonometrischer Funktionen sollte ebenfalls aus der Einführungsphase bekannt sein (siehe rechts und Seite 157).



Der Ableitungskreislauf einfacher trigonometrischer Funktionen



Integration trigonometrischer Funktionen

Um trigonometrische Funktionen korrekt integrieren zu können, ist es notwendig, die **Kettenregel** gewissermaßen rückwärts zu beachten.

Beispiel:

- Gegeben sei das unbestimmte Integral $\int 2\sin(5x+3)dx$. Gesucht werden die Stammfunktionen.
- Um zu integrieren, überlegt man sich zunächst, dass die Stammfunktion aufgrund des oben abgebildeten Ableitungskreislaufs ja vermutlich etwas mit –cos zu tun haben muss.
- Wir wissen jedoch, dass die Ableitung von $k(x) = -2\cos(5x+3)$ aufgrund der Kettenregel so lautet: $k'(x) = 5 \cdot 2\sin(5x+3) = 10\sin(5x+3)$. Es gilt also, die 5 vorne zu neutralisieren, wenn wir das oben angegebene unbestimmte Integral berechnen wollen.
- Weil wir so schlau sind, kommen wir schnell auf die Lösung:

$$\int 2\sin(5x+3)dx = -\frac{2}{5}\cos(5x+3) + C$$

Allgemeine Regeln

$$\int r \cdot \sin(ax+b)dx = -\frac{r}{a}\cos(ax+b) + C \qquad \int r \cdot \cos(ax+b)dx = \frac{r}{a}\sin(ax+b) + C$$

Man beachte, dass diese Regeln nur gelten, wenn die Terme in den Klammern linear sind!

Aufgaben

Seiten 151–152	Zu erledigen bis	Hinweise
1		Genau hinschauen.
2		Ebenso.

Seiten 154–156	Zu erledigen bis	Hinweise
2 ab		Mit arcsin oder arccos lösen.
3		Theoreme zur Vereinfachung benutzen!
8		Ebenso.
9		Exakt ausrechnen geht nicht.

Seiten 159–162	Zu erledigen bis	Hinweise
2		Mit den Regeln sehr sorgfältig umgehen!
3		
7 a e f		
11		f(x) – g(x) ist die Differenz.
12		Nullstellen von g ausrechnen!

Seiten 167–173	Zu erledigen bis	Hinweise
3		Übliche Methoden...
4		Ordinaten = y-Werte
6		Bitte gegebenes Intervall beachten!

Seiten 175–182	Zu erledigen bis	Hinweise
3		Flächenformel mit Winkel nachschlagen!
4		Das ist kein Quadrat.
13		Für Winkelsache Ableitung benutzen.
14		Das ist eine schöne Wasserrutsche.