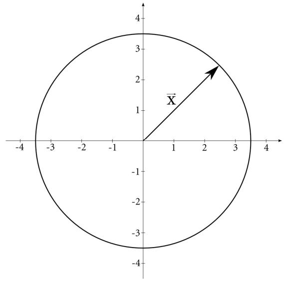
Kreise in der Ebene

→ LK-Buch S. 190 bis 195

Kreisgleichung in Vektorform

Kreis um den Koordinatenursprung

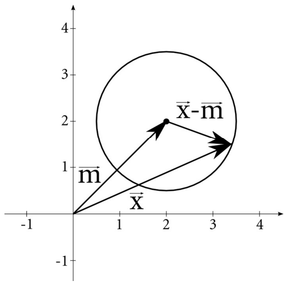


Es liegen alle Punkte auf dem Kreis (wobei hier nur der Rand als Kreis gilt, nicht das Innere), deren Ortsvektoren $\vec{x}$ genau die Länge des Radius r haben.

Darum gilt die folgende Kreisgleichung: $K: \left|\vec{x}\right| = r$.

Man kann sie auch geringfügig umformulieren: $K: \left(\vec{x}\right)^2 = r^2$.

Kreise mit beliebigem Mittelpunkt



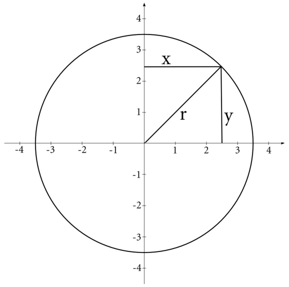
Hier muss nun der Vektor vom Mittelpunkt zu einem Punkt auf dem Kreis genau die Länge des Radius haben. Wie ihr wisst, ist der Vektor vom Mittelpunkt zu einem Punkt auf dem Rand mit $\vec{x} - \vec{m}$ auszudrücken.

Daher diese Kreisgleichung: $K: \left|\vec{x} - \vec{m}\right| = r$

Oder eben: $K: \left(\vec{x} - \vec{m}\right)^2 = r^2$.

Kreisgleichung in Koordinatenform

Kreis um den Koordinatenursprung

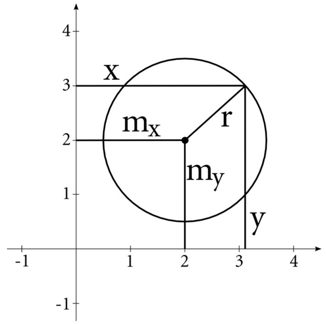


Hierbei nutzt man den Satz des Pythagoras aus. Demnach gilt für einen beliebigen Punkt $(x|y)$, der auf dem Kreis liegt, dass $x^2 + y^2 = r^2$ gelten muss.

Damit hat man schon eine Kreisgleichung: $K: x^2 + y^2 = r^2$

Anders formuliert: $K: \sqrt{x^2 + y^2} = r$

Kreis um einen beliebigen Mittelpunkt



Die Koordinaten des Mittelpunktes seien $(m_x \mid m_y)$. Um vom Mittelpunkt des Kreises zu einem Punkt $(x|y)$ zu kommen, muss man die Differenz $x - m_x$ nach rechts/links gehen und die Differenz $y - m_y$ nach oben/unten.

Daraus ergibt sich die Kreisgleichung:

$$K: (x - m_x)^2 + (y - m_y)^2 = r^2$$

Oder eben: $K: \sqrt{(x - m_x)^2 + (y - m_y)^2} = r$

Typische Aufgaben

Hier nur einige Kurzbeschreibungen von typischen Aufgaben. Die Beispiele auf den Seiten 192–194 sollten unbedingt durchgelesen werden.

Kreise durch drei Punkte

- Wenn drei Punkte ABC gegeben sind und man die Kreisgleichung des Kreises durch diese drei Punkte bilden soll, muss sich vergegenwärtigen, dass der gesuchte Kreis der Umkreis des Dreieckes ABC ist.
- Der **Mittelpunkt** des Umkreises ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der drei Dreiecksseiten. Diesen Schnittpunkt kann man mit etwas Vektor-Arbeit gut berechnen.
- Den zur Kreisgleichung noch benötigten **Radius** kann man einfach berechnen, indem man den Abstand des Mittelpunkts zu einem der drei Punkte ABC berechnet.

Geraden und Kreise

- Geraden in der Ebene können einen Kreis an zwei Punkten **schneiden** (die Gerade heißt dann **Sekante),** sie können ihn in einem Punkt **berühren (→ Tangente)** oder ihn sozusagen **verfehlen (→ Passante).**
- Um die Lagebeziehung herauszufinden, muss man lediglich **die Zeilen der Geradengleichung** (die hierbei in Vektorform vorliegen sollte) in die Koordinatengleichung des Kreises einsetzen. Je nachdem, wie viele Lösungen es dann gibt, weiß man, wie viele Schnitt-/Berührpunkte es gibt und daraus ergibt sich dann die Lagebeziehung.

Aufgaben S. 191–195

Übung		Zu erledigen bis	☺	😐	☹
Grundlagen	1				
	2				
	3				
	4 (freiw.)				
	5ab				
3P	6a				

Übung		Zu erledigen bis	☺	😐	☹
Geraden	7				
	8				
Tang.	10				
	11				
Komplex	15ac				
	16				

Kugeln

→ LK-Buch S. 196 bis 199

Vorbemerkung
Kugeln im Raum haben sehr ähnliche Eigenschaften zu den Kreisen in der Ebene. Es muss z.B. jeder Punkt auf der Oberfläche den gleichen Abstand, nämlich den Radius, vom Mittelpunkt haben. Aus diesem Grund sind die Kugelgleichungen den Kreisgleichungen sehr ähnlich, teils sogar identisch und werden aus diesem Grund hier nicht mehr ausführlich erklärt.

Kugelgleichung in Vektorform

Kugel mit beliebigem Mittelpunkt

Wie oben erwähnt, muss der Vektor vom Mittelpunkt zu einem Punkt auf der Kugeloberfläche genau die Länge des Radius haben. Wie ihr wisst, ist der Vektor vom Mittelpunkt zu einem Punkt auf dem Rand mit $\vec{x} - \vec{m}$ auszudrücken.

Die Kugelgleichung lautet daher: $K: \left|\vec{x} - \vec{m}\right| = r$ oder: $K: \left(\vec{x} - \vec{m}\right)^2 = r^2$.

Kugelgleichung in Koordinatenform

Kugel um einen beliebigen Mittelpunkt

Die Koordinaten des Mittelpunktes seien $(m_x \mid m_y \mid m_z)$. Um vom Mittelpunkt der Kugel zu einem Punkt $(x \mid y \mid z)$ zu kommen, muss man die Differenz $x - m_x$ nach vorne/hinten gehen, die Differenz $y - m_y$ nach rechts/links und die Differenz $z - m_z$ nach oben/unten. Daraus ergibt sich die Kugelgleichung:

$K: (x - m_x)^2 + (y - m_y)^2 + (z - m_z)^2 = r^2$ oder: $K: \sqrt{(x - m_x)^2 + (y - m_y)^2 + (z - m_z)^2} = r$

Bitte aufpassen: Die Koordinatengleichungen kann man durch Auflösen mithilfe der binomischen Formeln in eine Gestalt bringen, die sehr beängstigend sein kann.

Aufgaben auf den Seiten 196–199

Übung		Zu erledigen bis	☺	😐	☹
Grundlagen	1				
	2b				
	3				
	4 *				
4P	5a *				

Übung		Zu erledigen bis	☺	😐	☹
Komplexe Aufgaben	6				
	7				
	11				
	14a				
	15				

Q4 Mathematik Martin-Niemöller-Schule Stefan Krissel

Kugeln

→ LK-Buch S. 196 bis 199

Vorbemerkung
Kugeln im Raum haben sehr ähnliche Eigenschaften zu den Kreisen in der Ebene. Es muss z.B. jeder Punkt auf der Oberfläche den gleichen Abstand, nämlich den Radius, vom Mittelpunkt haben. Aus diesem Grund sind die Kugelgleichungen den Kreisgleichungen sehr ähnlich, teils sogar identisch und werden aus diesem Grund hier nicht mehr ausführlich erklärt.

Kugelgleichung in Vektorform

Kugel mit beliebigem Mittelpunkt

Wie oben erwähnt, muss der Vektor vom Mittelpunkt zu einem Punkt auf der Kugeloberfläche genau die Länge des Radius haben. Wie ihr wisst, ist der Vektor vom Mittelpunkt zu einem Punkt auf dem Rand mit $\vec{x} - \vec{m}$ auszudrücken.

Die Kugelgleichung lautet daher: $K: \left|\vec{x} - \vec{m}\right| = r$ oder: $K: \left(\vec{x} - \vec{m}\right)^2 = r^2$.

Kugelgleichung in Koordinatenform

Kugel um einen beliebigen Mittelpunkt

Die Koordinaten des Mittelpunktes seien $(m_x \mid m_y \mid m_z)$. Um vom Mittelpunkt der Kugel zu einem Punkt $(x \mid y \mid z)$ zu kommen, muss man die Differenz $x - m_x$ nach vorne/hinten gehen, die Differenz $y - m_y$ nach rechts/links und die Differenz $z - m_z$ nach oben/unten. Daraus ergibt sich die Kugelgleichung:

$K: (x - m_x)^2 + (y - m_y)^2 + (z - m_z)^2 = r^2$ oder: $K: \sqrt{(x - m_x)^2 + (y - m_y)^2 + (z - m_z)^2} = r$

Bitte aufpassen: Die Koordinatengleichungen kann man durch Auflösen mithilfe der binomischen Formeln in eine Gestalt bringen, die sehr beängstigend sein kann.

Aufgaben auf den Seiten 196–199

Übung		Zu erledigen bis	☺	😐	☹
Grundlagen	1				
	2b				
	3				
	4 *				
4P	5a *				

Übung		Zu erledigen bis	☺	😐	☹
Komplexe Aufgaben	6				
	7				
	11				
	14a				
	15				

Kugeliges Allerlei

→ LK-Buch Seiten 200 bis 207

Diese letzte Ausgabe unserer Mathe-Blätter bietet kurze Übersichten und Beschreibungen zur Durchführung diverser Lageuntersuchungen. Sie sollen bei letzten Klausur- und Abiturvorbereitungen nützlich sein. Ausführliche Beispiele und Illustrationen finden sich im Buch.

Lagebeziehungen Kugeln und Geraden

Man benötigt die Gerade in Parameterform. Deren Zeilen setzt man in die Kugelgleichung folgendermaßen ein: Die erste Zeile (also z.B. $3 + 2r$) für x, die zweite für y und die dritte für z.

Wie viele Lösungen hat die entstandene Gleichung?

- **Keine** → Die Gerade ist eine **Passante**. Das heißt, sie berührt/schneidet die Kugel nicht.
- **Eine** → Die Gerade ist eine **Tangente**. Das heißt, sie berührt die Kugel an einem Punkt.
- **Zwei** → Die Gerade ist eine **Sekante**. Das heißt, sie schneidet die Kugel in zwei Punkten.

Um die Ortvektoren der eventuell vorhandenen gemeinsamen Punkte zu bestimmen, muss man nur die Lösungen der eben benutzten Gleichung in die Geradengleichung einsetzen.

Beispiel

$$g: \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix} \qquad K: (x-3)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 4$$

$$\begin{aligned}
(1+2r-3)^2 + (2r+1)^2 + 1^2 &= 4\\
(2r-2)^2 + (2r+1)^2 + 1 &= 4\\
4r^2 - 8r + 4 + 4r^2 + 4r + 1 + 1 &= 4\\
8r^2 - 4r + 6 &= 4\\
8r^2 - 4r + 2 &= 0\\
r^2 - 0{,}5r + 0{,}25 &= 0
\end{aligned}$$

$$r_{1/2} = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} - \frac{1}{4}}$$

$$r_{1/2} = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{-\frac{3}{16}}$$

keine Lösung → Passante!

Lagebeziehungen Kugeln und Ebenen

Zunächst berechnet man (z.B. mit der Hesse'schen Normalenform) den **Abstand d** des **Kugelmittelpunkts** von der **Ebene**) und vergleicht ihn mit dem **Radius r** der Kugel.

- $d > r$ → Kugel und Ebene haben **keinen gemeinsamen Punkt.** Weder Schnitt noch Berührung.
- $d = r$ → Kugel und Ebene **berühren** sich an einem Punkt.
- $d < r$ → Kugel und Ebene **schneiden** sich in einem Schnittkreis.

Um die Ortvektoren der eventuell vorhandenen gemeinsamen Punkte zu bestimmen, muss man nur die Lösungen der eben benutzten Gleichung in die Geradengleichung einsetzen.

Berechnung von Schnittkreisen

- Zunächst benötigt man den schon berechneten Abstand d der Ebene E vom Kugelmittelpunkt M.
- Nun suchen wir den Radius r' des Schnittkreises, dieser errechnet sich gemäß Pythagoras so: $r' = \sqrt{r^2 - d^2}$
- Nun brauchen wir noch den Mittelpunkt M' des Schnittkreises. Dies ist der Schnittpunkt einer Lotgeraden durch M auf die Ebene E mit der Ebene E *(kein Druckfehler, das soll so heißen).*
- Durch die Angabe von M und r' ist der Schnittkreis noch nicht hinreichend bestimmt, da es unendlich viele Kreise im Raum gibt, die diesen Mittelpunkt und diesen Radius haben. Deshalb gibt man noch den Normalenvektor der Ebene an, der ja auch senkrecht auf dem Kreis steht. Eine Kreisgleichung des Schnittkreises kann man zwar prinzipiell aufstellen, aber das ist jetzt gerade nicht unser Bier.

Spurkreise

... sind die Schnittkreise von Kugeln mit den Koordinatenebenen. Da je nach Ebene eine der Koordinaten des Schnittkreismittelpunktes 0 sein muss, ist die Bestimmung des Schnittkreises recht einfach.

Tangentialebenen

- Ebenen, die eine Kugel nur in einem Punkt berühren, heißen **Tangentialebenen.** Wenn B der Berührpunkt ist, M der Kugelmittelpunkt und X irgendein von B verschiedener Punkt auf E, so ist ja der Vektor $\overrightarrow{MB} = (\vec{b} - \vec{m})$ senkrecht zu $\overrightarrow{BX} = (\vec{x} - \vec{b})$.
- Daraus ergibt sich grundsätzlich die Rohform einer Tangentialebene, offenbar eine Normalenform: E: $(\vec{x} - \vec{b}) \cdot (\vec{b} - \vec{m}) = 0$
- Wenn K und E gegeben sind und B gesucht ist, muss man zuerst mithilfe der Hesse'schen Normalenform von E den Abstand zwischen M und E berechnen. Dann muss man eine Lotgerade von M auf E fällen. Der Schnittpunkt dieser Gerade mit E ist B.

Lagebeziehungen Kugeln und Kugeln

Zur Bestimmung der Lagebeziehung muss man nur den **Abstand d der beiden Kugelmittelpunkte** berechnen und diesen mit den **Kugelradien r_1 und r_2 vergleichen.**
r_1 sei dabei der Radius der größeren Kugel, falls die Kugeln nicht gleich groß sind.

- $d > r_1 + r_2$: Die beiden Kugeln berühren sich nicht., liegen außerhalb voneinander.
- $d = r_1 + r_2$: Die beiden Kugeln berühren sich in einem Punkt.
- $r_1 + r_2 > d > r_1 - r_2$: Die beiden Kugeln schneiden sich in einem Kreis.
- $d = r_1 - r_2$: Die Kugeln berühren sich an einem Punkt und liegen ineinander.
- $d < r_1 - r_2$: Die beiden Kugeln berühren sich nicht, liegen ineinander.

Berechnung der Schnittebene (auf der der Schnittkreis liegt)

- Man benötigt Koordinatengleichungen der beiden Kugeln.
- Diese zieht man voneinander ab, so dass alles quadratische eliminiert wird.
- Die übrige lineare Gleichung ist eine Koordinatengleichung der Schnittebene

Im Sonderfall, dass beide Kugeln gleichgroß sind, ergibt sich beim vorletzten Fall eine Identität und der letzte Fall ist unmöglich.

Aufgaben auf den Seiten 200–207

Übung	Zu erledigen bis
1bc	
2	
3	
4a	
6	

☺

Übung	Zu erledigen bis
8 adf	
11c	
15a	
16	
17	

Aufgaben zu Lagebeziehungen zweier Kugeln

1. Ermittle jeweils die Lagebeziehung der beiden Kugeln K_1 und K_2

a. $K_1 : (x+1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 4$
$K_2 : (x-3)^2 + y^2 + (z+3)^2 = 9$

b. $K_1 : (x-6)^2 + (y-5)^2 + (z-4)^2 = 81$
$K_2 : (x+6)^2 + (y+5)^2 + (z+4)^2 = 81$

c. $K_1 : x^2 + y^2 = 25 - z^2$
$K_2 : (y-6)^2 + (z-8)^2 = 25 - x^2$

d. $K_1 : x^2 + y^2 + z^2 - 2 = 0$
$K_2 : 2 \cdot \left(x^2 + (y-0,5)^2 + (z-0,5)^2\right) = 1$

e. $K_1 : (x-q)^2 + (y-2q)^2 + (z+q)^2 = q^2$
$K_2 : (x+q)^2 + y^2 + z^2 = 4q^2$

Ein Kugelfisch.
Bild: bilder.mzibo.net

2. Stelle die Gleichung einer Kugel auf, die ...

a. vollständig außerhalb
b. vollständig innerhalb
c. teils außerhalb, teils innerhalb

von $K : (x-7)^2 + (y+5)^2 + (z-12)^2 = 225$ liegt.

3. Erfreue dich deines Lebens und zeichne hier etwas Fröhliches hin, z.B. einen Zug, der durch eine Blumenwiese fährt und Fußbälle geladen hat, die von einem Zebra bewacht werden, dass gerade ein Honigbrötchen gegessen hat: