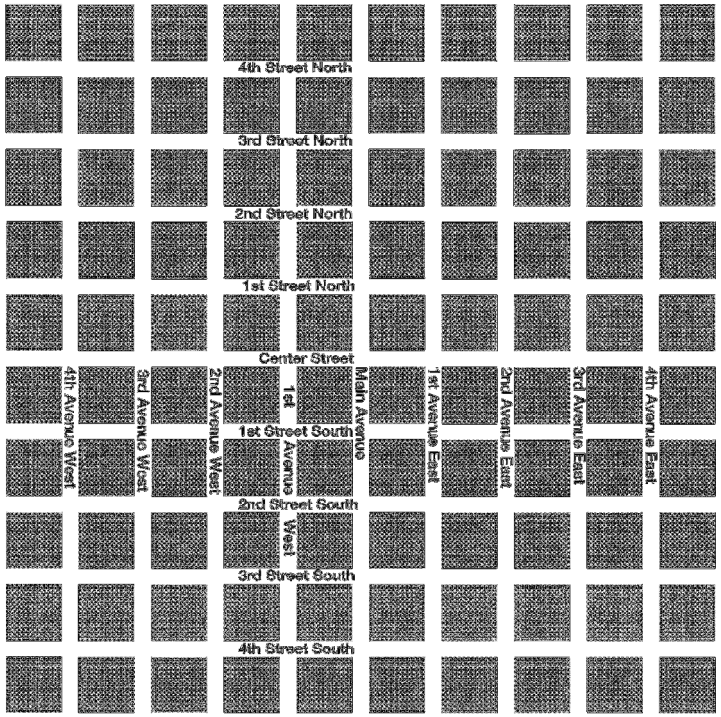
Vektoren

Unterwegs in New Gusbach



a) Du wohnst an der Kreuzung 3. Nord und 2. West. Dein veranulesischer Kumpel, der unsere Schriftzeichen nicht lesen kann, aber unsere Sprache versteht, ruft dich an und will den Weg zu dir wissen. Er sagt, dass er vor einer riesigen Statue steht, von der du weißt, dass sie an der Kreuzung 4. Süd und 3. Ost steht. Er hat einen Kompass dabei. Beschreibe ihm den Weg zu dir möglichst einfach.

b) Angenommen, dein Freund wäre Superman und er könnte direkt zu dir über die Häuser fliegen. Wie lange wäre sein Weg? Ein Häuserblock ist quadratisch und hat die Seitenlänge 50 m. Die Straßenbreite ist bereits darin eingerechnet.

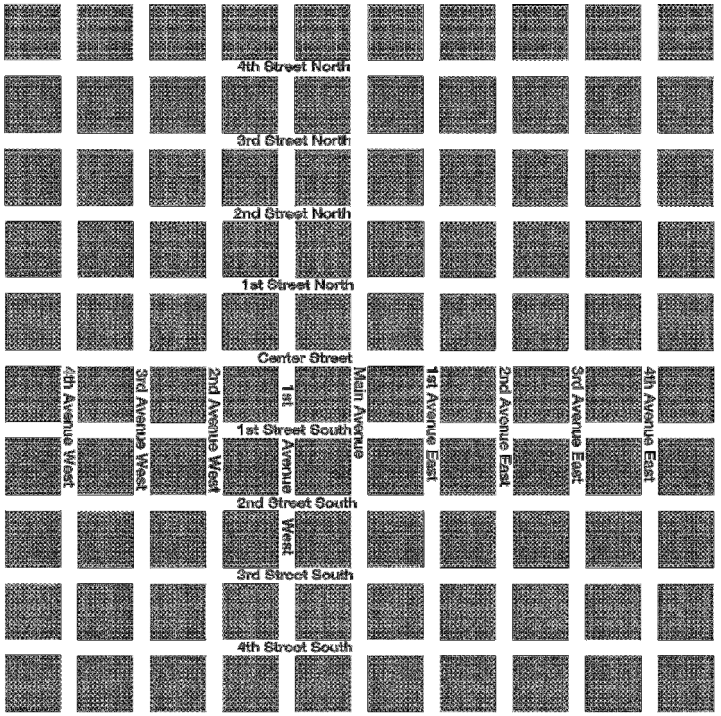
c) Nach zwei Stunden ruft dich dein Kumpel an und sagt, er sei erst zwei Straßen nach Norden gegangen, dann 5 nach Westen, dann eine nach Süden, dann sechs nach Norden, dann drei nach Osten und jetzt weiß er nicht, wo er ist. Der Grund für seinen Irrweg: Er wollte sich die Stadt ansehen. Wo ist er und wie kommt er zu dir?

d) Als er endlich bei dir ist, will er wissen, wie weit er jetzt vom Zentrum der Stadt entfernt ist (Luftlinie). Außerdem möchte er wissen, wie weit er insgesamt gelaufen ist.

Q2 Mathematik GK Martin-Niemöller-Schule Stefan Krissel

Vektoren

Unterwegs in New Gusbach



a) Du wohnst an der Kreuzung 3. Nord und 2. West. Dein veranulesischer Kumpel, der unsere Schriftzeichen nicht lesen kann, aber unsere Sprache versteht, ruft dich an und will den Weg zu dir wissen. Er sagt, dass er vor einer riesigen Statue steht, von der du weißt, dass sie an der Kreuzung 4. Süd und 3. Ost steht. Er hat einen Kompass dabei. Beschreibe ihm den Weg zu dir möglichst einfach.

b) Angenommen, dein Freund wäre Superman und er könnte direkt zu dir über die Häuser fliegen. Wie lange wäre sein Weg? Ein Häuserblock ist quadratisch und hat die Seitenlänge 50 m. Die Straßenbreite ist bereits darin eingerechnet.

c) Nach zwei Stunden ruft dich dein Kumpel an und sagt, er sei erst zwei Straßen nach Norden gegangen, dann 5 nach Westen, dann eine nach Süden, dann sechs nach Norden, dann drei nach Osten und jetzt weiß er nicht, wo er ist. Der Grund für seinen Irrweg: Er wollte sich die Stadt ansehen. Wo ist er und wie kommt er zu dir?

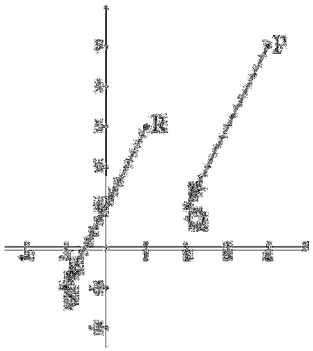
d) Als er endlich bei dir ist, will er wissen, wie weit er jetzt vom Zentrum der Stadt entfernt ist (Luftlinie). Außerdem möchte er wissen, wie weit er insgesamt gelaufen ist.

Vektoren – Grundlagen 1 mathe@steyvel.com

Vektoren– Grundlagen

Definition

Wissenschaftlich: Ein Vektor ist ein Element eines Vektorraumes.
Vorläufig für die Schule: Ein Vektor ist eine Klasse von Pfeilen, die in Richtung und Länge übereinstimmen.
Einfach zum Merken: Ein Vektor ist eine Verschiebung, eine Wegbeschreibung.



Erklärung der Schuldefinition

Wenn man von Punkt P zum Punkt Q gehen möchte, muss man 2 nach links und 4 nach unten gehen, abgekürzt mit $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$. Den Weg dorthin kann man als Pfeil darstellen.

Offensichtlich muss man von R nach S ebenfalls 2 nach links und 4 nach unten gehen, also gilt auch $\overrightarrow{RS} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Die beiden Pfeile sind nicht dieselben, denn sie liegen ja an unterschiedlichen Orten, aber sie haben dieselbe Richtung und dieselbe Länge, also repräsentieren sie denselben Vektor $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Schreibweisen

Vektoren in der Ebene (2D)

Wie oben schon gesehen, haben Vektoren in einer zweidimensionalen (also „flachen“) Umgebung eine recht einfache Struktur. Oben schreibt man die Verschiebung in x-Richtung, unten die Verschiebung in y-Richtung hin.

Beispiele:

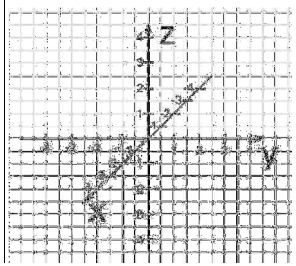
3 rechts, 4 hinunter: $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

keine seitliche Verschiebung, 7 nach oben: $\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix}$

5 links, 10 hoch $\begin{pmatrix} -5 \\ 10 \end{pmatrix}$

Vektoren im Raum (3D)

Sie funktionieren grundsätzlich wie die Vektoren in der Ebene, aber das Koordinatensystem sieht hier anders aus, man beachte vor allem die unvertraute Achsenbenennung (unbedingt schnell lernen) und die Skalierung der x-Achse (halber Abstand).



Ein Vektor 3 nach vorne, 2 nach links und 5 nach oben hieße also:

$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

Vektoren zwischen zwei Punkten:

Vom Punkt $A(x_a \mid y_a)$ zum Punkt $B(x_b \mid y_b)$ führt der Vektor $\begin{pmatrix} x_b - x_a \\ y_b - y_a \end{pmatrix}$.

Länge/Betrag

$|\vec{v}|$ bezeichnet die Länge (bzw. den Betrag) eines Vektors. Man berechnet ihn folgendermaßen:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{x_v^2 + y_v^2}\,. \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{x_v^2 + y_v^2 + z_v^2}$$

Hinweis: Wenn zwei Punkte P und Q gegeben sind, so ist der Abstand der beiden Punkte der Betrag genau $|\overrightarrow{PQ}|$.

Ortsvektoren von Punkten

Jeder Punkt wird ja grundsätzlich so geschrieben: $P(x \mid y)$. Doch jeder Punkt hat einen **Ortsvektor,** das ist der Vektor vom Koordinatenursprung zu dem Punkt: $\vec{p} = \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Für Punkte im Raum gilt das gleiche.

Aufgaben

1. Bestimme jeweils den Vektor $\overrightarrow{PQ}$.

a) P (1 | 2) Q (–3 | 5)
b) P (0 | 20) Q (20 | 0)
c) P (3 | –3) Q (–3 | 3)
d) P (–11 | 5) Q (0 | –1)

2. Das Viereck ABCD soll ein Parallelogramm werden. Bekannt sind:

A (–2 | –1) $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ Finde die Koordinaten der Punkte B, C, D heraus.

3. Berechne die Länge der folgenden Vektoren und zeichne sie in ein Koordinatensystem:

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$
b) $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$
c) $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$
d) $\vec{d} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix}$

4. Zeichne die folgenden Punkte in ein dreidimensionales Koordinatensystem:

a) A (0 | 1 | 2)
b) B (2 | 3 | 0)
c) C (4 | 0 | 3)
d) D (5 | 2 | 4)

5. Zeichne eine Pyramide mit quadratischer Grundfläche, die auf der xy-Ebene liegt, in ein räumliches Koordinatensystem. Die Seitenlänge der Grundfläche soll 4 betragen, die Höhe 3. Die Spitze liegt über dem Punkt (2 | 2 | 0). Gib alle Eckpunkte und die Vektoren von den Bodenecken zur Spitze an.

6. Wie weit sind jeweils die beiden Punkte voneinander entfernt?

a) K (0 | 0 | 0) L (1 | 1 | 1)
b) R (1 | 2 | 4) S (0 | –1 | –8)
c) V (7 | –7 | 0) W (0 | –2 | 10)

7. Das Dorf Hinterstadl liegt in einem Tal in den Alpen, auf etwa 700m Meereshöhe. Zur Belustigung der Touristen möchte man einen Skilift auf den nahe gelegenen Berg Sonnenkogl errichten. Der Gipfel des Berges liegt auf 1900m Meereshöhe und liegt 2km südlich und 0,6km östlich von der geplanten Talstation. Nun möchte der Bürgermeister schnell wissen, wie viel Drahtseil für den Lift mindestens benötigt wird.

Rechnen mit Vektoren

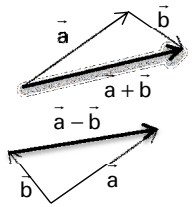
Vorab: Die Rechenregeln hier werden nur für dreidimensionale Vektoren dargestellt. Sie gelten aber äquivalent auch für zweidimensionale Vektoren. Die Regeln sind nicht so trivial wie es scheinen mag.

Grundlegende Regeln

Addition und Subtraktion

Definitionen:

$$\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\a_3+b_3\end{pmatrix} \qquad \vec{a}-\vec{b}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1-b_1\\a_2-b_2\\a_3-b_3\end{pmatrix}$$



Es gelten (Sätze):

Das Kommutativgesetz: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

Das Assoziativgesetz: $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$

Multiplikation mit einer reellen Zahl

Vektoren kann man mit einer reellen Zahl multiplizieren, allerdings (noch) nicht untereinander – dafür gibt es spezielle Regeln, die später eingeführt werden.

Definition:

$$s\cdot\vec{a}=s\cdot\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}s\cdot a_1\\s\cdot a_2\\s\cdot a_3\end{pmatrix}$$

$s,r\in\mathbb{R}$

Es gelten folgende Gesetze (Sätze):

$$r\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=r\cdot\vec{a}+r\cdot\vec{b}$$
$$(r+s)\cdot\vec{a}=r\cdot\vec{a}+s\cdot\vec{a}$$
$$(r\cdot s)\cdot\vec{a}=r\cdot\left(s\cdot\vec{a}\right)$$

Ein Beweis steht auf Seite 55.

Spezielle Vektoren

Nullvektor:

$$\vec{0}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Gegenvektor:
Jeder Vektor $\vec{v}$ hat einen Gegenvektor, der die gleiche Länge hat, aber in die entgegengesetzte Richtung zeigt. Dieser Vektor ist $-\vec{v}$.
Es gilt natürlich: $\vec{v}+(-\vec{v})=\vec{v}-\vec{v}=\vec{0}$

Ein **Einheitsvektor** ist ein Vektor mit dem Betrag/der Länge 1.

Skalarprodukt und Winkel

Definition des Skalarproduktes:
Wenn $\vec{v}$ und $\vec{w}$ zwei Vektoren sind und α der Winkel, unter dem sie sich schneiden, dann ist das Skalarprodukt wie folgt definiert:

$$\vec{v}\cdot\vec{w}=\left|\vec{v}\right|\cdot\left|\vec{w}\right|\cdot\cos\alpha$$

Leichte Berechnung des Skalarproduktes:

$$\vec{v}\cdot\vec{w}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{pmatrix}=v_1\cdot w_1+v_2\cdot w_2+v_3\cdot w_3$$

Berechnung des Winkels zwischen zwei Vektoren:

Es gilt zunächst (folgt aus Definition):

$$\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\left|\vec{v}\right|\cdot\left|\vec{w}\right|}=\cos\alpha$$

Mit Hilfe der arccos-Funktion (TR: $\cos^{-1}$) kann man nun leicht den Winkel ausrechnen. Man beachte, dass man immer den Winkel berechnet, der den einen Pfeil auf dem kürzesten Weg auf den anderen dreht. Grundsätzlich gibt es ja zwischen zwei Vektoren immer zwei Winkel, z.B. 50° und 130°.

$$\alpha=\arccos\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\left|\vec{v}\right|\cdot\left|\vec{w}\right|}\right)$$

Linearkombinationen

Definition Linearkombination:
Eine Linearkombination ist eine Summe aus n Vektoren, die jeweils mit einer reellen Zahl multipliziert werden:

$$r_1\cdot\vec{v_1}+r_2\cdot\vec{v_2}+r_3\cdot\vec{v_3}+\ldots+r_n\cdot\vec{v_n}=\sum_{i=1}^{n}r_i\cdot\vec{v_i}$$

(Der Ausdruck rechts vom Gleichheitszeichen ist eine abgekürzte Schreibweise der linken Seite.)

Kollineare Vektoren

Definition:
Zwei Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ (beide $\neq\vec{0}$), für die gilt: $\vec{v}=r\cdot\vec{w}$, heißen kollinear. $r\in\mathbb{R}\setminus 0$.

Erläuterung:
Das trifft immer auf zwei Vektoren zu, die in die gleiche oder entgegengesetzte Richtung zeigen, aber unterschiedlich lang sein können.

Komplanare Vektoren

Definition:
Wenn drei Raumvektoren auf einer Ebene liegen, nennt man sie komplanar.

Satz:
Die drei Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ (dürfen keine Nullvektoren sein) sind genau dann **komplanar**, wenn es drei reelle Zahlen r, s und t gibt, von denen mindestens zwei ungleich 0 sind, so dass gilt:
$r\cdot\vec{u}+s\cdot\vec{v}+t\cdot\vec{w}=\vec{0}$

Kollinearität** (bei zwei Vektoren) und **Komplanarität** (bei drei Vektoren) sind Spezialfälle der **linearen Abhängigkeit.

Lineare Abhängigkeit

Definition:
n Vektoren $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}, \ldots, \vec{v_n}$ heißen *linear abhängig*, wenn man mindestens einen der Vektoren als Linearkombination der anderen darstellen kann. Sonst heißen sie *linear unabhängig*.

Satz:
n Vektoren $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}, \ldots, \vec{v_n}$ sind genau dann *linear unabhängig*, wenn die Gleichung

$r_1\cdot\vec{v_1}+r_2\cdot\vec{v_2}+r_3\cdot\vec{v_3}+\ldots+r_n\cdot\vec{v_n}=\vec{0}$ nur die triviale Lösung $r_1=r_2=r_3=\ldots=r_n=0$ hat.
Die Vektoren sind genau dann *linear abhängig*, wenn es (mindestens) eine weitere Lösung gibt.
.

Weiteres hierzu (Rechenregeln, Beweise etc.) auf den Seiten 116–125.

Lineare Gleichungssysteme (LGS)

Definition:
Ein lineares Gleichungssystem ist eine Menge von mindestens zwei Gleichungen, in denen Variablen maximal in erster Potenz vorkommen. Normalerweise kommen in allen Gleichungen eines Systems die gleichen Variablen vor, ansonsten wäre das ganze System recht sinnlos.

Lineare Gleichungssysteme sind ein unverzichtbares Werkzeug, wenn es darum geht, eine Menge von Vektoren auf lineare Abhängigkeit zu untersuchen. Wollen wir z.B. drei Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ auf ihre lineare Abhängigkeit untersuchen, müssen wir ja prüfen, wie die Gleichung $r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v} + t \cdot \vec{w} = \vec{0}$ lösbar ist – ob es nur die triviale Lösung $r = s = t = 0$ gibt (→ lineare Unabhängigkeit) oder ob es auch andere Lösungen gibt (→ lineare Abhängigkeit).

Ein Beispiel

Die Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sollen auf lineare Abhängigkeit geprüft werden.

Es ist also zu prüfen, wie die Gleichung $r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v} + t \cdot \vec{w} = 0$ lösbar ist.
Im Folgenden wird diese Gleichung aufgestellt und umgeformt.

$$r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1r \\ 2r \\ 3r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1s \\ 0s \\ 1s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1t \\ 1t \\ 1t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -r \\ 2r \\ 3r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s \\ 0 \\ s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -t \\ t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -r+s-t \\ 2r+0+t \\ 3r+s+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Statt der letzten Zeile kann man drei Gleichungen aufstellen und sie der Orientierung halber mit römischen Zahlen kennzeichnen:

I $\quad -r + s - t = 0$
II $\quad 2r + 0 + t = 0$
III $\quad 3r + s + t = 0$

Das ist unser LGS!

Um es zu lösen, versucht man, Variablen zu eliminieren, indem man ganze Gleichungen oder deren Vielfache zu anderen addiert oder von anderen subtrahiert. Dabei muss in jedem Schritt eine Gleichung unangetastet bleiben.

I	$-r + s - t = 0$
$II + 2 \cdot I = II_A$	$2s - t = 0$
$III + 3 \cdot I = III_A$	$4s - 2t = 0$
I	$-r + s - t = 0$
II_A	$2s - t = 0$
$III_A - 2 \cdot II_A = III_B$	$0 = 0$

Da sich aus II_A ergibt, dass nur $s = 0{,}5t$ gelten muss, kann t jede beliebige Zahl sein, woraus sich s ergibt.

Auch r hängt nur von s und t, also letztlich nur von t ab, weshalb es auch unendlich viele Werte annehmen kann.

Damit ist das LGS nicht-trivial gelöst, also sind die Vektoren linear abhängig.

Eine kürzere Schreibweise für die Lösung des LGS:

r	s	t	
−1	1	−1	0
2	0	1	0
3	1	1	0
−1	1	−1	0
	2	−1	0
	4	−2	0
−1	1	−1	0
	2	−1	0
		0	0

Das ist das so genannte **Gauß-Verfahren.** Die Form, in die man das LGS immer bringen möchte, heißt **Dreiecksform.** Wieso wohl?

So kann man einiges an Schreibarbeit sparen. Es ist aber stets freigestellt, wie man es macht.

Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme

Es gibt drei Möglichkeiten, was passiert, wenn man LGS auf Dreiecksform bringt:

1. In der letzten Zeile steht links vom Gleichheitszeichen genau eine Variable und rechts eine Zahl. Beispiel: $t = 3$. Kann man mithilfe der anderen Zeilen die übrigen Variablen exakt bestimmen, also z.B. $r = 5$ und $s = -2$, dann sind die drei Zahlen die Lösung des LGS und man sagt, das LGS ist **eindeutig lösbar**.
2. In der letzten Zeile bleibt nur eine triviale Aussage übrig, so wie $0 = 0$ oder $3 = 3$ oder $-8 = -8$. In diesem Fall lassen sich nicht alle Variablen eliminieren und es lässt sich nur eine Abhängigkeit angeben, wie z.B. $r = -2t$ und $s = 5t$. Da t (oder eine andere Variable) frei wählbar ist, ist das LGS **nicht eindeutig lösbar**, es hat **unendliche viele Lösungen**.
3. In der letzten Zeile ergibt sich ein Widerspruch, z.B. $0 = -7$ oder es widersprechen sich zwei Zeilen einander, eine behaupte z.B. $s = -5$, eine andere sage $s = 12$. Bei solchen Widersprüchen ist das LGS **nicht lösbar**.

Lineare Gleichungssysteme haben also immer eine, keine oder unendlich viele Lösungen.

Aufgaben

Seiten 53–56		Zu erledigen bis
Grundlagen	1	
	2 acdg	
	5 de	

Lin. Gleichungssysteme	Seiten 17–29	Zu erledigen bis
	1ab	
	3bcd	
	5	
	7	
	17	

Seiten 57–65		Zu erledigen bis			Zu erledigen bis
Lin.-Komb.	1		lin. Abh.	8 afh	
kollinear & komplanar	2		komplexe Aufgaben	11	
	3			27	
	5 c				
	6 a				

		Zu erledigen bis			Zu erledigen bis
Skalar-produkt S. 116–119	3 a		Winkel S. 121ff	5	
	5			8b	
	8		Orth. S. 124ff	4	
	10			5	

Geraden

Erinnerung: Ortsvektoren

Zu jedem Punkt $P(p_1 \mid p_2 \mid p_3)$ gibt es einen Ortsvektor $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$,

der vom Koordinatenursprung auf den Punkt zeigt.
Ortsvektoren sind die einzigen Vektoren, die örtlich gebunden sind!

Die Parametergleichung einer Geraden

Man kann Geraden mithilfe von Vektoren darstellen.

- Dazu benötigt man zuerst einen **Stützvektor** $\vec{v}$, der der Ortsvektor irgendeines Punktes auf der Geraden ist. Dieser Punkt heißt **Stützpunkt.**
- Außerdem braucht man einen **Richtungsvektor** $\vec{w}$, der definiert, in welche Richtung die Gerade verläuft.

Eine Parametergleichung einer Geraden hat die Form $g: \vec{x} = \vec{v} + r \cdot \vec{w}$ mit $r \in \mathbb{R}$

Sie bedeutet, dass der Ortsvektor $\vec{x}$ eines jeden Punktes X auf der Geraden als eine Linearkombination aus dem Stützvektor $\vec{v}$ und einem Vielfachen des Richtungsvektors $\vec{w}$ auszudrücken sein muss. r nennt man *Geradenparameter* (deswegen auch die Bezeichnung Parametergleichung).

Vorsicht: Da sowohl bei derselben Gerade für den Stützvektor als auch für den Richtungsvektor unendlich viele (aber nicht beliebige!) Vektoren infrage kommen, sind unendlich viele Geradengleichungen für dieselbe Gerade denkbar.

Geraden durch zwei Punkte

Wenn man zwei Punkte P und Q hat und gerne eine Gerade durch diese beiden Punkte aufstellen möchte, benutzt man einfach $\vec{p}$ oder $\vec{q}$ als Stützvektor der Geraden und entweder $\overrightarrow{PQ}$ oder $\overrightarrow{QP}$ (oder Vielfache davon) als Richtungsvektor. Es gibt also mehrere Möglichkeiten, die Geradengleichung aufzustellen, hier zwei passende:

$$g: \vec{x} = \vec{p} + r \cdot \overrightarrow{PQ} = \vec{p} + r \cdot \left(\vec{q} - \vec{p}\right) \qquad g: \vec{x} = \vec{q} + r \cdot \overrightarrow{QP} = \vec{q} + r \cdot \left(\vec{p} - \vec{q}\right)$$

Untersuchung von Lagebeziehungen

Lagebeziehung zwischen Punkt und Gerade

Ein Punkt P kann entweder auf einer Geraden liegen oder auch nicht. Man prüft das durch folgende Gleichung nach:

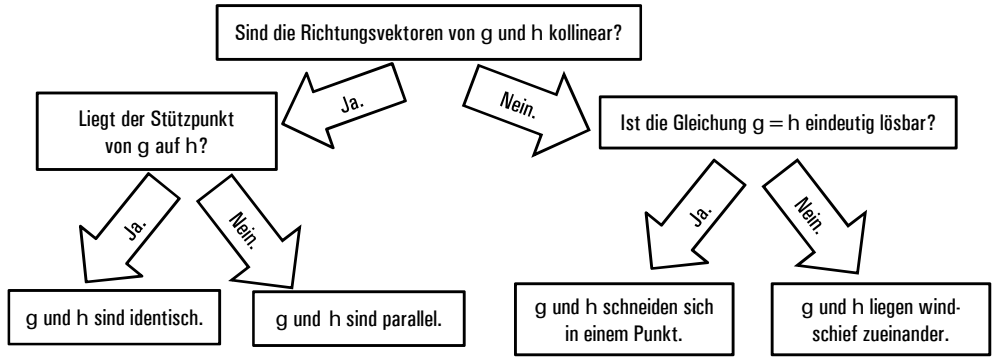
$\vec{p} = \vec{v} + r \cdot \vec{w}$ Diese formt man noch so um: $\vec{p} - \vec{v} = r \cdot \vec{w}$

Dadurch ergibt sich ein LGS, das entweder eine oder keine Lösung hat (es gibt darin nur eine Variable, nämlich r).

Bei **einer Lösung** liegt P auf g. Bei **keiner Lösung** liegt P nicht auf g.

Lagebeziehung zwischen Gerade und Gerade

Zwei Geraden $g: \vec{x} = \vec{v} + r \cdot \vec{w}$ und $h: \vec{x} = \vec{a} + s \cdot \vec{b}$
können zueinander vier verschiedene Lagebeziehungen haben, für die bestimmte Bedingungen erfüllt sein müssen:



Aufgaben

Seiten 70–73		Zu erledigen bis	Hinweise
Parametergleichung	1		Lagebeschreibung: Verlauf durch Quadranten etc.
	2		Beschreiben ist Pflicht, Zeichnen optional.
Zweipunktgleichung	3 bdh		Ja, M ist genau in der Mitte von CBFG
	4 c		●—●—●—●
	5		Da muss man sehr genau lesen und zeichnen.
	9		Zum Spaß auch mal zwei oder drei Geradengleichungen
Diverses	13 bd		Palim palim. Siehe dieses Blatt links unten.
	14 a		Parameter jey.
	17		Ursprungsgerade = Gerade durch Ursprung.
	18		Nullen zuerst!

Seiten 75–82		Zu erledigen bis	Hinweise o.ä.
Lagebeziehungen	1		Beispiel lesen!
	2		Nicht die 6en, 3en und Oen durcheinander bringen!
	7		Das soll für alle Zeiten eine Lehre sein!
	15		Ursprung festlegen, alles andere darauf basieren.
	22		Im Notfall systematisch ausprobieren.

Ebenen

Ebenen im hier gebrauchten Sinne sind unendliche zweidimensionale Gebilde, die im Raum herumschweben.

Es gibt drei gebräuchliche Ebenenformen: **Parameterform, Koordinatenform** und **Normalenform,** wobei die letzten beiden mathematisch eigentlich gleich sind.

Die Parametergleichung

Sie sieht fast aus wie eine Geradengleichung, nur kommt ein weiterer Richtungsvektor hinzu, da eine Ebene ja ein zweidimensionales Gebilde ist, nicht ein eindimensionales wie eine Gerade.

Rohform

$$E: \vec{x} = \vec{u} + r \cdot \vec{v} + s \cdot \vec{w}$$

Beispiel

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

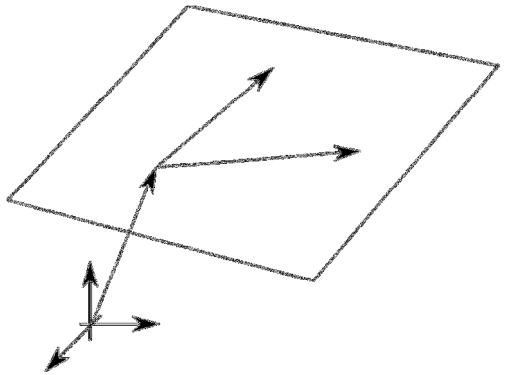
Die beiden Richtungsvektoren dürfen natürlich nicht kollinear sein, da wir sonst eine Gerade hätten.

Ebenen durch drei Punkte

Auch hier funktioniert es genau wie bei Geraden. Wenn eine Ebene durch die drei Punkte N, P und Q verlaufen soll, so lautet *eine* korrekte Ebenengleichung:

$$\vec{x} = \vec{n} + r \cdot \overrightarrow{NP} + s \cdot \overrightarrow{NQ} = \vec{n} + r \cdot \left(\vec{p} - \vec{n}\right) + s \cdot \left(\vec{q} - \vec{n}\right)$$

Selbstverständlich ist es egal, welcher Punkt als Stützpunkt gewählt.



Die Normalen- und Koordinatengleichungen

Definition Normalenvektor

Ein Normalenvektor einer Ebene ist ein Vektor, der senkrecht auf einer Ebene steht.

Berechnung eines Normalenvektors

Möglichkeit 1: Über ein LGS

Da ein Normalenvektor $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ senkrecht auf den beiden Richtungsvektoren einer Ebene liegen muss, muss das Skalarprodukt des Normalenvektors mit beiden Richtungsvektoren Null ergeben. Somit erhält man ein LGS wie beispielsweise

$$5n_1 - n_3 = 0$$
$$n_1 - 4n_2 = 0$$

Eine beliebige Lösung dieses LGS taugt als Normalenvektor.

Möglichkeit 2: Über das Vektorprodukt

Wenn $\vec{a}$ und $\vec{b}$ die Richtungsvektoren einer Ebene E sind, so ist das Ergebnis des Vektorprodukts $\vec{a} \times \vec{b}$ ein zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ orthogonaler Vektor und taugt damit als Normalenvektor für E.

Definition des Vektorprodukts (auch Kreuzprodukt genannt):

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Definition Einheitsvektor

Als Einheitsvektor bezeichnet man einen Vektor der Länge (= des Betrages) 1.

Hinweis

Jeder Vektor $\vec{v}$ lässt sich schnell zu einem in die gleiche Richtung zeigenden Einheitsvektor $\overrightarrow{v_0}$ umformen, indem man jede seiner Komponenten durch die Länge des Vektors teilt.

Beispiel:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \left|\vec{v}\right| = \sqrt{6^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{36 + 4 + 9} = \sqrt{49} = 7 \qquad \overrightarrow{v_0} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6/7 \\ -2/7 \\ 3/7 \end{pmatrix}$$

Definition Normaleneinheitsvektor

Ein Normaleneinheitsvektor $\overrightarrow{n_0}$ ist ein Normalenvektor mit dem Betrag 1.

Die Normalengleichung einer Ebene

Rohform	Beispiel
$E: \left(\vec{x}-\vec{a}\right)\cdot\vec{n}=0$	$E: \left[\vec{x}-\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}4\\1\\20\end{pmatrix}=0$

Erläuterung

$\vec{x}$ ist der Ortsvektor eines beliebigen Punktes auf der Ebene
$\vec{a}$ ist ein Stützvektor der Ebene, also der Ortsvektor eines Punktes auf der Ebene
$\vec{n}$ ist ein Normalenvektor , also ein Vektor, der senkrecht auf der Ebene steht

Die oben angegebene Normalengleichung bezeichnet die gleiche Ebene wie die Parametergleichung zuvor.

Die Hesse'sche Normalenform

Sie sieht genauso aus wie die eben eingeführte Normalenform, mit einem Unterschied:
Statt eines Normalenvektors mit beliebiger Länge wird ein **Normaleneinheitsvektor** benutzt!
Man braucht diese Form für manche Abstandsberechnungen.

Rohform	Beispiel
$E: \left(\vec{x}-\vec{a}\right)\cdot\vec{n_0}=0$	$E: \left[\vec{x}-\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\right]\cdot\frac{1}{\sqrt{417}}\begin{pmatrix}4\\1\\20\end{pmatrix}=0$

Die vereinfachte Normalenform

Bei dieser Normalenform wird die eckige Klammer der Normalenform schon teils aufgelöst, wie man in der Rechnung rechts sieht.

Das führt zu...

Rohform	Beispiel
$E: \vec{n}\cdot\vec{x}=\vec{a}\cdot\vec{n}$	$E: \begin{pmatrix}4\\1\\20\end{pmatrix}\cdot\vec{x}=34$

$$E: \left[\vec{x}-\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}4\\1\\20\end{pmatrix}=0$$

$$E: \vec{x}\cdot\begin{pmatrix}4\\1\\20\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\1\\20\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}=0$$

$$E: \begin{pmatrix}4\\1\\20\end{pmatrix}\cdot\vec{x}=\begin{pmatrix}4\\1\\20\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$$

$$E: \begin{pmatrix}4\\1\\20\end{pmatrix}\cdot\vec{x}=34$$

Die Koordinatenform

Sie entsteht, wenn man die vereinfachte Normalenform vollständig ausmultipliziert:

Daher...

$$E: \begin{pmatrix}4\\1\\20\end{pmatrix}\cdot\vec{x}=34$$

$$E: 4x+y+20z=34$$

Rohform	Beispiel
$E: ax+by+cz=d$	$E: 4x+y+20z=34$

Warum so viele Ebenenformen?

Jede Ebenenform hat ihre Vor- und Nachteile. Die Parameterform lässt sich leicht aufstellen, mit ihr zu rechnen ist allerdings aufwändig. Besonders die Koordinatenform ist bei allen Arten von Lageuntersuchungen äußerst einfach zu handhaben, außerdem kann man an ihr sehr gut ablesen, wie eine Ebene im Raum liegt.

Einfache Ebeneneigenschaften

Achsenabschnitte

Man kann die Schnittpunkte mit den drei Achsen (die so genannten Achsenabschnitte) sehr leicht bestimmen, wenn man die Koordinatengleichung benutzt:

$$E: ax+by+cz=d$$

Schnittpunkt mit der x-Achse	Schnittpunkt mit der y-Achse	Schnittpunkt mit der z-Achse
$S_x\left(\frac{d}{a}\mid 0\mid 0\right)$	$S_y\left(0\mid\frac{d}{b}\mid 0\right)$	$S_z\left(0\mid 0\mid\frac{d}{c}\right)$

Spurgeraden

Eine Spurgerade ist die Schnittgerade einer Ebene mit einer der Koordinatenebenen.

Spezielle Lagen/Ebenen

$a,b,c\in\mathbb{R}\setminus 0$

$E: by+cz=d$	parallel zur x-Achse
$E: ax+cz=d$	parallel zur y-Achse
$E: ax+by=d$	parallel zur z-Achse
$E: cz=d$	parallel zur x-y-Ebene
$E: by=d$	parallel zur x-z-Ebene
$E: ax=d$	parallel zur y-z-Ebene
$E: cz=0$	ist die x-y-Ebene
$E: by=0$	ist die x-z-Ebene
$E: ax=0$	ist die y-z-Ebene

Umrechnung Koordinaten-/Normalenform in Parameterform

Diese Umrechnung ist sehr leicht: Man findet mithilfe der Koordinaten-/Normalenform drei Punkte, die auf der Ebene liegen und bastelt aus diesen drei Punkten die Parameterform. Besonders einfach geht das mit den Achsenabschnitten (falls es alle drei gibt)!

Lagebeziehungen

Punkt – Ebene

Ein Punkt kann ja entweder auf der Ebene liegen oder nicht. Die einfachste Möglichkeit, dies zu überprüfen, ist, die Koordinaten des Punktes in die Koordinatengleichung einzusetzen.

→ Ergibt sich eine wahre Aussage wie $0=0;\ -1=-1$ oder $5=5$, so liegt der Punkt auf der Ebene.
→ Ergibt sich ein Widerspruch wie $0=7;\ -1=9$ oder $5=-2$, so liegt der Punkt nicht auf der Ebene.

Gerade – Ebene

Es gibt mehrere Möglichkeiten, wie man die gegenseitige Lage einer Ebene und einer Gerade untersuchen kann. Hier ist die einfachste und schnellste vorgestellt.

Beschreibung	Beispiel/Erklärung
1. Die Ebene sollte in Koordinatenform vorliegen. Gegebenenfalls rechnet man sie um.	$E: 2x+y-2z=6$ $\qquad g: \vec{x}=\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$
2. Man setzt die Zeilen der Gerade in die Koordinatengleichung ein.	$2(0+3r)+(2+0r)-2(1+r)=6$
3. Man vereinfacht die Gleichung.	$6r+2-2-2r=6$ $4r=6$ $r=1,5$
4. Man deutet das Ergebnis.	→ Ergibt sich eine wahre Aussage wie $9=9$ oder $-4=-4$ oder $0=0$, so **liegt die Gerade g ganz in der Ebene E.** → Ergibt sich ein Widerspruch wie $0=3$ oder $-4=8$ oder $7=1$, so **liegt die Gerade g parallel zur Ebene E.** → Ergibt sich ein Wert für r (so wie oben), so **schneidet** die Gerade g die Ebene E. Der **Schnittpunkt** ist leicht zu berechnen: Man muss nur das r in die Geradengleichung einsetzen, dann erhält man den Ortsvektor des Schnittpunkts.

Ebene – Ebene

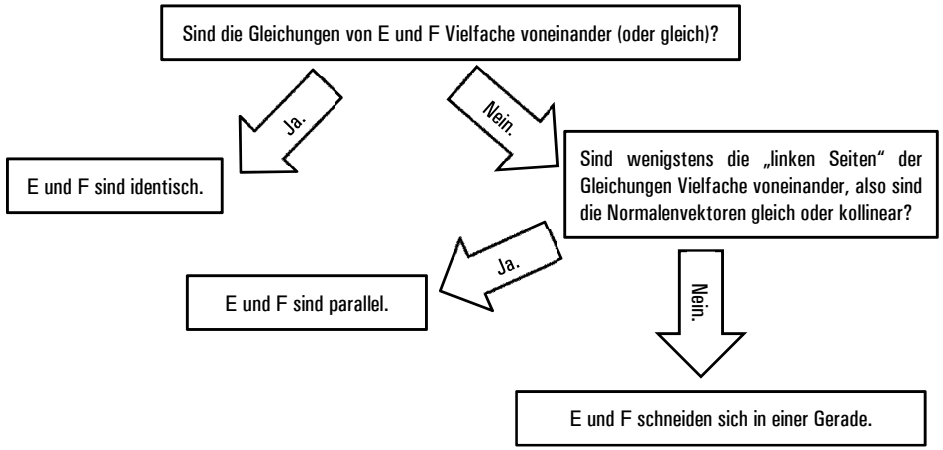
Möchte man die Lagebeziehung der Ebenen E und F untersuchen, sollte grundsätzlich mindestens eine der Ebenen in Koordinatenform vorliegen.

Erster Fall: E in Koordinatenform, F in Parameterform

$$E: 2x+y-2z=6 \qquad F: \vec{x}=\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

Beschreibung	Beispiel/Erklärung
1. Man setzt die Zeilen von F in die Gleichung von E ein und vereinfacht die Gleichung.	$2(0+3r+s)+(2+0r+s)-2(1+r+0s)=6$ $6r+2s+2+s-2-2r=6$ $4r+3s=6$
2. Man deutet das Ergebnis.	→ Ergibt sich eine wahre Aussage wie $9=9$ oder $-4=-4$ oder $0=0$, so **sind E und F identisch,** also dieselbe Ebene. → Ergibt sich ein Widerspruch wie $0=3$ oder $-4=8$ oder $7=1$, so liegen die beiden Ebenen **parallel zueinander.** → Ergibt sich eine Gleichung wie oben, so **schneiden** sich die beiden Ebenen in einer **Schnittgerade.** → Bei Schritt 3 weitermachen.
3. *Achtung: Hier nur weitermachen, wenn beim vorigen Schritt die letzte Möglichkeit aufgetreten ist!!!* Man löst die Gleichung nach r oder s auf.	Hier wird nach r aufgelöst: $4r+3s=6$ $4r=-3s+6$ $r=-0,75s+1,5$
4. Man ersetzt in der Gleichung von F das r durch den Term, der s enthält.	$F: \vec{x}=\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}+(-0,75s+1,5)\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$
5. Man vereinfacht die Gleichung und erhält damit Gleichung der Schnittgerade.	$g_{EF}: \vec{x}=\begin{pmatrix}0+4,5\\2+0\\1+1,5\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-2,25+1\\0+1\\-0,75+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4,5\\2\\2,5\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-1,25\\1\\-0,75\end{pmatrix}$

Zweiter Fall: E und F in Koordinatenform
Hier ist ein Verfahren beschrieben, wie man die Lagebeziehung zweier Ebenen in Koordinatenform feststellen kann.



Um im letztgenannten Fall die Schnittgerade zu berechnen, geht man folgendermaßen vor:

Seien die Ebenen: $E: 2x + y - 2z = 6$ $F: x + 1{,}5y + z = 4$

$$\begin{aligned} &2x + y - 2z = 6 \\ &x + 1{,}5y + z = 4 \\ \hline &-2y - 4z = -2 \end{aligned}$$

Man bildet ein LGS und eliminiert eine Variable: $I - 2 \cdot II$

Die sich ergebende Gleichung löst man nach einer Variablen auf (nach welcher, ist egal, hier wird nach y aufgelöst):

$$\begin{aligned} -2y - 4z &= -2 \\ y + 2z &= 1 \\ y &= 1 - 2z \end{aligned}$$

Nun setzt man *völlig willkürlich* eine der Variablen mit dem Geradenparameter r gleich. Hier: $z = r$

Die übrigen Variablen berechnet man in Abhängigkeit von r:

$$y = 1 - 2r$$

$$x = 2{,}5 + 2r$$

x ergibt sich, wenn man die Werte für z und y in eine der Ebenengleichungen einsetzt.

Daraus ergibt sich für die Schnittgerade: $g_{EF}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Schnittwinkel

Gerade – Gerade

$$\alpha = \arccos \frac{\left|\vec{v} \cdot \vec{w}\right|}{\left|\vec{v}\right| \cdot \left|\vec{w}\right|}$$

$\vec{v}$ und $\vec{w}$ sind die Richtungsvektoren der beiden Geraden.

Gerade – Ebene

$$\alpha = \arcsin \frac{\left|\vec{n} \cdot \vec{v}\right|}{\left|\vec{n}\right| \cdot \left|\vec{v}\right|}$$

- $\vec{n}$ ist der Normalenvektor der Ebene,
- $\vec{v}$ der Richtungsvektor der Gerade.

Ebene – Ebene

$$\alpha = \arccos \frac{\left|\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}\right|}{\left|\vec{n_1}\right| \cdot \left|\vec{n_2}\right|}$$

$\vec{n_1}$ und $\vec{n_2}$ sind die Normalenvektoren der beiden Ebenen.

Orthogonale Objekte
Bei zueinander orthogonalen Objekten müssen die Zähler der oben vorkommenden Brüche Null sein, was gegebenenfalls die Rechnung doch sehr erleichtert.

Aufgaben

			Zu erledigen bis
Parameterform S. 91–92		1 c	
		3	
		4	
Umrechnungen S. 134–136		3	
		5	
		7	
		8	
Lage Punkt-Ebene S. 99		1	
		2	
Lage Gerade-Ebene	101–103	10	
		5	
	139–141	1	
		5	
		12	
Lage Ebene-Ebene	106	17	
	142–143	7	
		8	
		14	
		18	
Winkel S. 156–161		2	
		3	
		12 ade	

			Zu erledigen bis
Spurpunkte & -geraden S. 83–86		1	
		2	
		8	
S. 108–110		20	
Anwendungen und Komplexes	82	19	
	83–87	3	
		4	
		5	
		11	
	106	18	
	110	28	
	112	3bc	
	129	10	
	144	17	
		20	
	148	3	

Abstandsberechnungen

Mit Normalenvektoren lassen sich exzellent Abstandsberechnungen durchführen. Sie sind hier – wie auch im Buch – nach Schwierigkeit geordnet, deshalb kommen Ebenen auch recht früh.

Begriffsklärungen: Lotgerade, Lot, Lotfußpunkt

- Eine Gerade, die eine Ebene senkrecht schneidet (Schnittwinkel 90°) heißt **Lotgerade** oder einfach **Lot**.
- Von einem vorgegebenen Punkt A außerhalb der Ebene E kann man das **Lot** auf E **fällen**, indem man die Lotgerade durch A berechnet.
- Der Schnittpunkt der Lotgeraden auf E heißt **Lotfußpunkt.**

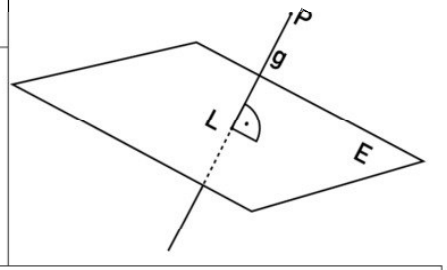
Der Abstand Punkt – Punkt

Der ist nur der Vollständigkeit halber hier angegeben. Wenn die Punkte P und Q heißen, muss man natürlich nur den Betrag des Vektors $\overrightarrow{PQ}$ berechnen.

Der Abstand Punkt – Ebene

Berechnung mit dem Lotfußpunktverfahren

1. Punkt und Ebene sind gegeben	$E: 4x - z = 45$ $P(3 \mid -2 \mid 1)$
2. Man konstruiert eine Gerade g, die senkrecht zu E durch P verläuft. Der Richtungsvektor dieser Geraden ist logischerweise der Normalenvektor der Ebene.	$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
3. Man berechnet den Schnittpunkt L (den so genannten Lotfußpunkt) von g und E.	$4 \cdot (3 + 4r) - (1 - r) = 45$ $17r = 34$ $r = 2$ $\Rightarrow \overrightarrow{OL} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $L(11 \mid -2 \mid -1)$
4. Zuletzt braucht man noch den Abstand von P zu L, das ist auch der Abstand d von P zur Ebene E.	$d = \left\lvert \overrightarrow{PL} \right\rvert = \sqrt{(11-3)^2 + (-2+2)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{68} \approx 8,2462$



Berechnung mit der Hesse'schen Normalenform/Koordinatenform

Das geht etwas schneller. Zunächst vier verschiedene Versionen derselben Ebene:

Koordinatenform $E: ax + by + cz = k$ $\quad E: 4x - z = 45$	**Normalenform** $E: (\vec{x} - \vec{a}) \cdot \vec{n} = 0$ $\quad E: \left[x - \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$
Hesse'sche Koordinatenform $E: \frac{ax + by + cz - k}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0$ $\quad E: \frac{4x - z - 45}{\sqrt{17}} = 0$	**Hesse'sche Normalenform** $E: (\vec{x} - \vec{a}) \cdot \overrightarrow{n_0} = 0$ $\quad E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix} \right] \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$

Man erinnere sich: $\overrightarrow{n_0} = \frac{1}{\left\lvert \vec{n} \right\rvert} \cdot \vec{n}$

Mit den beiden Hesse'schen Formen ist der Abstand d sehr schnell ermittelt (P bleibt bei $(3 \mid -2 \mid 1)$). Man muss nur die Koordinaten des Punktes P, bzw. dessen Ortsvektor einsetzen.

$$d = \left\lvert \frac{ap_x + bp_y + cp_z - k}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right\rvert = \left\lvert \frac{4 \cdot 3 - 1 - 45}{\sqrt{17}} \right\rvert \approx 8,2462$$

$$d = \left\lvert (\vec{p} - \vec{a}) \cdot \overrightarrow{n_0} \right\rvert = \left\lvert \left[\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix} \right] \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rvert = \left\lvert \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -10 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rvert \approx 8,2462$$

Halbräume (→S. 149)
Lässt man bei der Abstandsberechnung die Betragsstriche weg, erhält man manchmal auch negative Werte für d. Damit kann man feststellen, ob sich zwei Punkte auf derselben Seite von E befinden. Das ist dann der Fall, wenn d für beide Punkte das gleiche Vorzeichen hat. Man sagt dann, die beiden Punkte befinden sich im gleichen **Halbraum.**

Der Abstand paralleler Ebenen

Natürlich ergibt nur bei parallelen Ebenen der Begriff Abstand überhaupt einen Sinn – welchen Abstand sollten Ebenen haben, die sich schneiden? Bei parallelen Ebenen ist der Abstand natürlich immer gleich.

Das Verfahren ist sehr einfach, wenn man die vorigen kapiert hat:
Man sucht sich irgendeinen Punkt auf der einen Ebene und berechnet dann dessen Abstand zur anderen Ebene, wie oben beschrieben. Das war's. ☺ Siehe dazu auch Seite 152.

Der Abstand Gerade – Ebene (auch parallel)

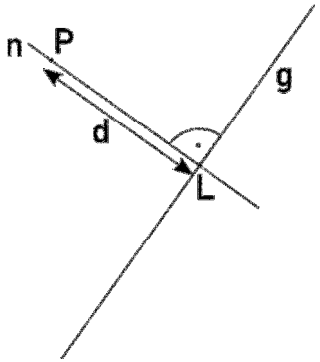
Das ist nun auch keine Kunst mehr: Einfach einen Punkt auf der Gerade benutzen, z.B. den Stützpunkt und dann den Abstand dieses Punktes von der Ebene berechnen.

Der Abstand Punkt – Gerade

Das ist jetzt etwas frickelig. Wir interessieren uns natürlich nur für den geringsten Abstand zwischen einem Punkt P und der Geraden g. Dabei unterscheiden wir zwischen dem zwei- und dem dreidimensionalen Fall:

Zweidimensional – Lotfußpunktverfahren

- Zunächst benötigt man eine Normale zu g – das ist eine Gerade, die senkrecht zu g verläuft. Diese Normale soll durch P verlaufen, weshalb wir P als Stützpunkt benutzen.
- L ist der Schnittpunkt von n und g
- Der Abstand von P und L ist gleichzeitig der Abstand von P zu g.



Zweidimensional – Hesse'sche Normalenform

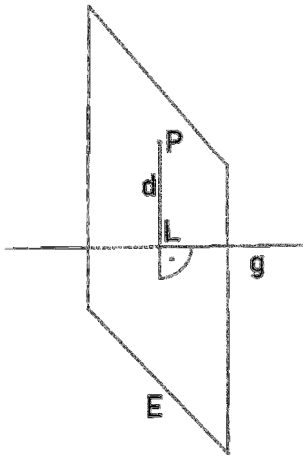
- Man kann mithilfe eines zu g senkrechten Vektors eine Art Hesse'sche Normalenform der Gerade bilden – der Stützvektor der Parametergleichung kann natürlich recycelt werden.
  Beispiel:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad g: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \end{pmatrix}\right] \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

- Um den Abstand von P zu g zu errechnen, setzt man, wie bei Ebenen den Ortsvektor von P in die Hesse'sche Normalenform ein und erhält den gesuchten Abstand.
- Siehe Seite 153.

Dreidimensional

- Man konstruiert sich eine Ebene E, die den Richtungsvektor von g als Normalenvektor hat. Den Ortsvektor von P kann man als Stützvektor benutzen.
- Man berechnet den Lotfußpunkt L von g auf E.
- Der Abstand von P nach L ist der gesuchte Abstand.
- Siehe Seite 154.



Der Abstand paralleler Geraden

Wenn g und h parallele Geraden sind, berechnet man einfach den Abstand des Stützvektors von g zu der Gerade h (oder anders herum) nach der oben beschriebenen Weise.

Der Abstand zweier windschiefer Geraden

Vorüberlegungen

- Die beiden Geraden haben folgende Gleichungen: $g: \vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{m_g}$ $h: \vec{x} = \vec{q} + s \cdot \vec{m_h}$
- Man kann leicht zwei parallele Ebenen (in Parameterform) konstruieren, indem man jeweils die Stützvektoren der Geraden übernimmt und die Richtungsvektoren beider Geraden verwendet:
  $G: \vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{m_g} + s \cdot \vec{m_h}$
  $H: \vec{x} = \vec{q} + r \cdot \vec{m_g} + s \cdot \vec{m_h}$
- Man muss nur eine dieser Ebenen benutzen. Hier nehme ich G.
- Es reicht nun, von G eine Hesse'sche Normalenform zu bilden und mit deren Hilfe den Abstand des Stützpunkts von h zu G zu berechnen. Dies ist auch der Abstand der beiden windschiefen Geraden.
- Daraus ergibt sich folgende Abstandsformel:

$d = \left|\left(\vec{p} - \vec{q}\right) \cdot \vec{n_0}\right| = \left|\left(\vec{q} - \vec{p}\right) \cdot \vec{n_0}\right|$, wobei $\vec{n_0}$ senkrecht zu beiden Richtungsvektoren $\vec{m_g}$ und $\vec{m_h}$ ist.

Aufgaben

Seiten 145–155		Zu erledigen bis
Punkt–Ebene	1	
	3	
	11	
Gerade–Ebene	14	
Punkt/Gerade	15	
	16	
par. Geraden	18	
	20	
	22	