Ober- und Untersummen

➔ siehe auch S. 14–17 im Buch.

Man kann den Flächeninhalt unter einem Funktionsgraphen annäherungsweise mit Ober- und Untersummen bestimmen. Dabei gilt per Definition:

Untersumme $<$ tatsächlicher Flächeninhalt $<$ Obersumme

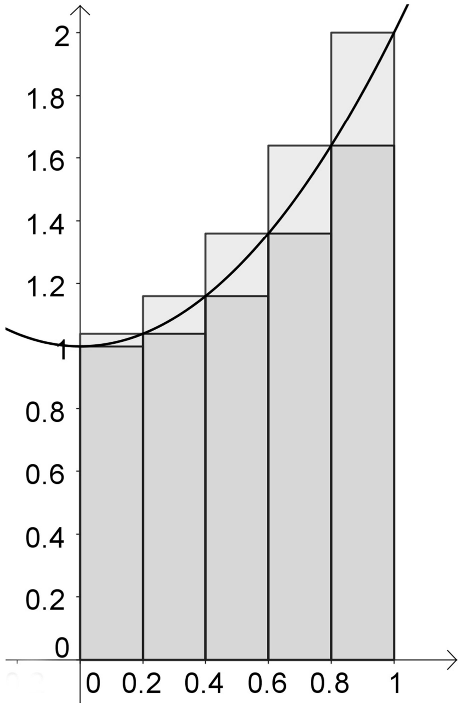
Beispiel

Es sollen Ober- und Untersumme zur Funktion $f(x) = x^2 + 1$ auf dem Intervall $[0;1]$ bei fünf Segmenten berechnet werden.

$$\begin{aligned} O_5 &= \text{Streifenbreite} \cdot \left(f(0,2) + f(0,4) + f(0,6) + f(0,8) + f(1)\right) \\ &= 0,2 \cdot (1,04 + 1,16 + 1,36 + 1,64 + 2) \\ &= 1,44 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_5 &= \text{Streifenbreite} \cdot \left(f(0) + f(0,2) + f(0,4) + f(0,6) + f(0,8)\right) \\ &= 0,2 \cdot (1 + 1,04 + 1,16 + 1,36 + 1,64) \\ &= 1,24 \end{aligned}$$

- Wie man sieht, unterscheiden sich Ober- und Untersumme nur in einem einzigen Eintrag (f(1), bzw. f(0)).
- Man beachte, dass man die Funktionswerte in der Klammer anders hätte wählen müssen, würde der Graph auf dem Intervall bergab verlaufen.



Aufgabe 4

Bestimme jeweils die Ober- und Untersumme O_5 und U_5 für die angegebene Funktion auf dem angegebenen Intervall.

a)	$a(x) = -x^2 + 4$	$[0;2]$
b)	$b(x) = x^3$	$[1;2]$
c)	$c(x) = 2x + 3$	$[0;5]$
d)	$d(x) = 3x$	$[0;z]$
e)	$e(x) = x^2$	$[0;z]$
f)	$f(x) = 4x^3$	$[0;z]$

Ober- und Untersummen mit n Streifen

Um die Genauigkeit zu erhöhen. kann man die Streifenanzahl n nennen und dieses n gegen Unendlich laufen lassen.

Beispiel: Obersumme O_n für $f(x) = x^2$ auf $[0;1]$

$$\begin{aligned} O_n &= \frac{1}{n} \cdot \left(\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{n}{n}\right)^2 \right) \\ &= \frac{1}{n^3} \cdot \left(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2\right) \end{aligned}$$

Das ist ja nun sehr toll, aber was sollen wir mit dem Ausdruck in der Klammer anfangen?
Hier ist nun der Zeitpunkt für einen Exkurs gekommen.

Exkurs: Das Beweisverfahren der vollständigen Induktion

Dieses Verfahren für Beweise von Formeln für natürliche Zahlen funktioniert so:

1. Man stellt eine Behauptung auf, auf die man z.B. durch Ausprobieren, Geistesblitz oder Eingebung des Heiligen Geistes gekommen ist.
2. Man beweist, dass sie für eine natürliche Zahl stimmt.
3. Dann beweist man, dass sie für $n + 1$ stimmt

Da ja aufgrund von Schritt 3 die Behauptung auch für n+2, n+3 usw. gelten muss, gilt sie für jede beliebige natürliche Zahl, die größer oder gleich der in Schritt 1 gewählten Zahl ist.

Hier nun ein Beispiel:

1. Behauptung

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

2. Test für n=2

$$1^2 + 2^2 = 5 = \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot (2+1)(2 \cdot 2 + 1)$$

3. Nachweis für n+1

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 = (n+1)\left(\frac{1}{6} n(2n+1) + (n+1)\right)$$

$$= (n+1)\left(\frac{n(2n+1)}{6} + \frac{6n+6}{6}\right) = \frac{1}{6}(n+1)\left(2n^2 + 7n + 6\right) = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3)$$

$$= \frac{1}{6}(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)$$

Vollziehe diesen Beweis nach, kläre für dich zunächst nicht nachvollziehbare Schritte und bereite dich auf eine öffentliche Erläuterung vor!!!

Mit der eben bewiesenen Formel ist es kein Problem mehr, die Obersumme exakt zu bestimmen:

$$O_n = \frac{1}{n}\cdot\left(\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{n}{n}\right)^2\right) = \frac{1}{n^3}\cdot\left(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2\right)$$

$$= \frac{1}{6n^3} n(n+1)(2n+1) = \frac{1}{6}\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\frac{2n+1}{n}$$

Nun kann man n gegen Unendlich laufen lassen:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{6}\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\frac{2n+1}{n}\right) = \left(\frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2\right) = \frac{1}{3}$$

Das ist nun der Grenzwert der Obersumme und damit der exakte Flächeninhalt.

Aufgabe 5

Berechne – ähnlich wie im Beispiel – die Untersumme. Benutze das gleiche Intervall und die gleiche Funktion wie im Beispiel.

Aufgabe 6

Bestimme den Grenzwert der Ober- oder Untersumme der folgenden Funktionen auf dem angegebenen Intervall.

a) $a(x) = x + 1$ $[0;1]$
b) $b(x) = x^2$ $[0;10]$
c) $c(x) = 2x^2 + x$ $[0;1]$
d) $d(x) = x^2$ $[0;z]$
e) $e(x) = 3x^2$ $[0;z]$

Bei d und e sollte etwas auffallen. Versuche, einen Verdacht zu formulieren, wie man von der Funktion schnell zum Flächeninhalt kommen kann.

Stammfunktionen und unbestimmte Integrale

Stammfunktionen

Definition: Jede differenzierbare Funktion F, für die gilt $F' = f$, heißt **Stammfunktion** von f.

→ Seite 26ff im Buch.

Achtung!
Es gibt den Vorgang des **Ableitens**, der auch **Differenzieren** genannt wird, aber der Prozess in die Gegenrichtung heißt ausschließlich **Integrieren**. Die Benutzung des Wortes **Aufleiten** ist nicht gestattet. Wer es dennoch benutzt, muss dreimal um das Schulgebäude rennen. Das ist kein Witz.

Aufgabe 7

Stelle fünf verschiedene Stammfunktionen der Funktion $f(x) = 12x^5 - 9x^2 + 1$ auf.

Unbestimmte Integrale

Definition: Die Menge aller Stammfunktionen einer Funktion f wird als unbestimmtes Integral bezeichnet. Schreibweise: $\int f(x)dx$

Beispiel
$\int (8x^3 - 3x^2)dx = 2x^4 - x^3 + c$

Das c am Ende wird als Stellvertreter für alle denkbaren Konstanten, also feste Zahlen, geschrieben.

Rechenregeln
Für Unbestimmte Integrale gelten diverse Rechenregeln (→ S. 29 im Buch), die du mit der Zeit weitgehend auswendig beherrschen solltest. Wir werden diverse Beispiele an der Tafel besprechen.

Aufgaben im Buch

Seite	Aufgabe	Hinweise	Zu erledigen bis
28	1a	Wurzeln als Potenzen schreiben.	
30	2	Regeln auf S. 29 beachten!	
31	4	Vor dem Integrieren zusammenfassen.	
31	7	Genau hinsehen!	
32	8	Die Alpen sähen ohne Berge erbärmlich aus.	
32	9	Hilfsskizzen erstellen!	

Das bestimmte Integral

Das bestimmte Integral ist ein Werkzeug, um mit Funktionen beschreibbare Gesamtbilanzen, Flächeninhalte, aber auch Durchschnitte zu berechnen.

Während ein unbestimmtes Integral letztlich eine Menge an Funktionen ist, kann man ein bestimmtes Integral ausrechnen, das Ergebnis ist ein Zahlenwert (es sei denn, es sind irgendwelche Parameter im Spiel).

Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Dieser Satz begegnet, je nachdem, wo man nachschaut, in ganz unterschiedlicher Darstellung. Folgendes könnt und sollt ihr euch fast ohne Einschränkung merken. Es hat für uns den Status einer **Definition.**

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)}$$

Voraussetzung ist lediglich, dass f differenzierbar ist (dass man also den Differentialquotienten bilden kann).

Wieso ist das bestimmte Integral nicht gleich der Flächeninhalt zwischen Graph und x-Achse?

1. Skizziere den Graphen von $ü(x) = 2x^3 - 8x$. Berechne dazu Nullstellen (3) und Extrempunkte (2) und den einen Wendepunkt.
2. Schätze (z.B. anhand der Kästchen auf dem Papier) ungefähr die Fläche, die der Graph mit der x-Achse einschließt.
3. Berechne nun $\int_{N_1}^{N_3} ü(x)dx$, wobei die Grenzen die beiden äußeren Nullstellen sind.
4. Überlege nun, wie man mithilfe des bestimmten Integrals die gesuchte Fläche (siehe 2.) berechnen kann. Teste deine Vorschläge.

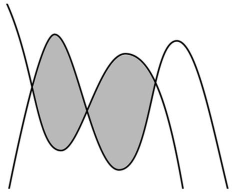
Rechenregeln
Auch für Bestimmte Integrale gelten diverse Rechenregeln (→ S. 39 im Buch), die du mit der Zeit weitgehend auswendig beherrschen solltest. Wir werden diverse Beispiele an der Tafel besprechen.

Aufgaben im Buch

Seite	**Aufgabe**	**Hinweise**	**Zu erledigen bis**
37	2b	...mathematisch mit Symmetriebedingungen	
39	5	Streng alle Zwischenschritte schreiben.	
39	6	Genau hinsehen!	
41	7		

Flächen zwischen den Graphen zweier Funktionen

→ Buch, Seiten 48–72



Die Fläche zu berechnen, die zwischen zwei Funktionsgraphen eingeschlossen ist, läuft immer gleich ab. Die folgende Anleitung ist daher für integrierbare Funktionen ohne mir bekannte Einschränkungen allgemeingültig.

Anleitungen zur Berechnung von Flächen…

zwischen einem Funktionsgraph und der x-Achse	**zwischen zwei Funktionsgraphen:**
Erster Schritt Sofern ein Intervall gegeben ist: Untersuchen, ob es innerhalb des Intervalls Nullstellen gibt. Falls kein Intervall gegeben ist: Alle Nullstellen berechnen.	**Erster Schritt** Sofern ein Intervall gegeben ist: Untersuchen, ob es innerhalb des Intervalls Schnittstellen zwischen den Funktionen gibt. Falls kein Intervall gegeben ist: Alle Schnittstellen berechnen.
Zweiter Schritt Die einzelnen bestimmten Integrale $\int_a^b f(x)dx$ zwischen benachbarten Nullstellen, bzw. zwischen Intervallgrenzen und den nächstgelegenen Nullstellen berechnen. Ggf. Symmetrie ausnutzen!!!	**Zweiter Schritt** Die einzelnen bestimmten Differenz-Integrale $\int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)dx$ zwischen benachbarten Schnittstellen, bzw. zwischen Intervallgrenzen und den nächstgelegenen Schnittstellen berechnen. Ggf. Symmetrie ausnutzen!!!
Dritter Schritt Die Beträge der einzelnen Integrale bilden (also ggf. das Minus entfernen). Die Beträge addieren. Fertig.	**Dritter Schritt** Die Beträge der einzelnen Integrale bilden (also ggf. das Minus entfernen). Die Beträge addieren. Fertig.

Seite	**Aufgabe**	**Zu erledigen bis**
52	3	
53	4	
54	6	
55	7	
56	10	
60	20	
61	23	

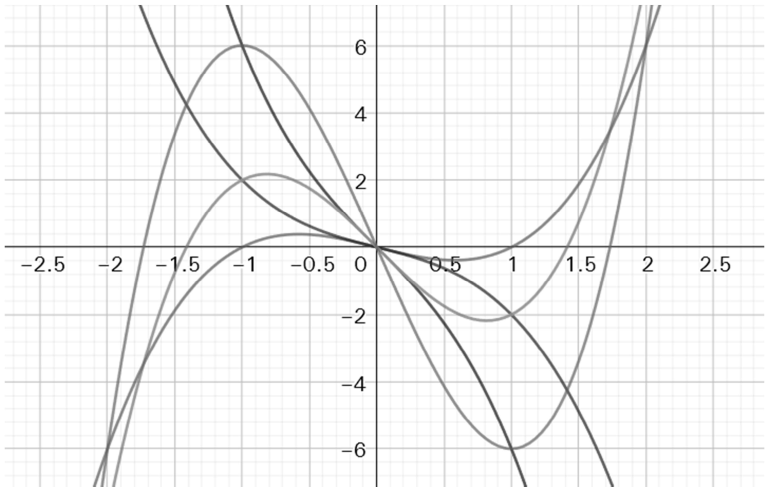
Seite	**Aufgabe**	**Zu erledigen bis**
63	4	
64	6	
67	12	
68	16 a (blau)	
71	23	
72	25	
72	28	

Funktionenscharen

→ Buch, Seiten 211–236

Der Sinn der Beschäftigung mit Funktionenscharen ist, mehrere Funktionen auf einmal zu betrachten, um Aufwand zu sparen. Ein Beispiel: Die diversen Funktionen links lassen sich ziemlich leicht mit der einen Schar rechts zusammenfassen.

$$\left.\begin{array}{l} f_{-2}(x) = -2x^3 - 4x \\ f_{-1}(x) = -x^3 - x \\ f_1(x) = x^3 - x \\ f_2(x) = 2x^3 - 4x \\ f_3(x) = 3x^3 - 9x \\ \text{usw.} \end{array}\right\} f_a(x) = ax^3 - a^2x$$



Zur Veranschaulichung benutzen wir GeoGebra:

In den neueren Versionen kann man direkt eine Funktionenschar eingeben, z.B. $f_a(x) = ax^3 - a^2x$

Es entsteht dann automatisch ein Schieberegler, mit dem man a beeinflussen kann. So kann man sehr schön beobachten, welche Auswirkungen auf den Graphen eine Veränderung von a hat. Für manche Werte von a gibt es z.B. drei Nullstellen, für andere nur eine. Etc.

Ableitung und Integration

Beim Ableiten und Integrieren von Funktionenscharen muss man achtgeben, dass man den Funktionsparameter a (oder welcher Buchstabe auch immer gewählt wurde) nicht mit der Variable verwechselt. Der Funktionsparameter muss immer wie eine feste Zahl behandelt werden.

$$\int f_a(x) = \frac{a}{4}x^4 - \frac{a^2}{2}x^2 + c$$
$$f_a(x) = ax^3 - a^2x$$
$$f'_a(x) = 3ax^2 - a^2$$
$$f''_a(x) = 6ax$$

Ortskurven

Wenn man z.B. als Koordinaten für einen HP $\left(4a \mid a^2\right)$ hat, dann liegen alle HP auf einer bestimmten Kurve, der sogenannten Ortskurve. Man bestimmst sie so:

Beschreibung	**Beispiel**
1. Man schreibt die Koordinaten des betreffenden Punkts in Abhängigkeit von x und y auf.	$x = 4a \qquad y = a^2$
2. Man löst die x-Gleichung nach a auf.	$\frac{x}{4} = a$
3. Das Resultat setzt man in die y-Gleichung ein und erhält die Ortskurve.	$y = a^2 = \left(\frac{x}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}x^2$

Aufgaben im Buch

Seite	Aufgabe	Hinweise	Zu erledigen bis
224	19	Hier habe ich keine.	
228	7	c: Annäherung heißt systematische Einschachtelung durch Ausprobieren.	
230	12	Die Fackel ist von oben gesehen kreisförmig, die Flamme gehört nicht zur Fackel.	
234	8	Tangens	
234	9	Keine Hinweise	
235	11	Gerne mit GeoGebra veranschaulichen	
235	12	Gerne mit GeoGebra veranschaulichen	
236	1	Zu d: Der Kopf befindet sich in diesem Modell exakt in 1,6m Höhe.	