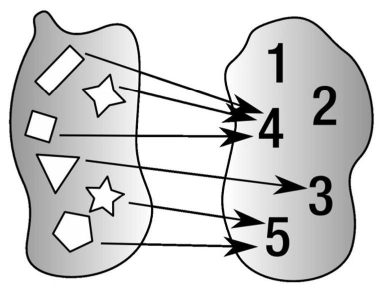
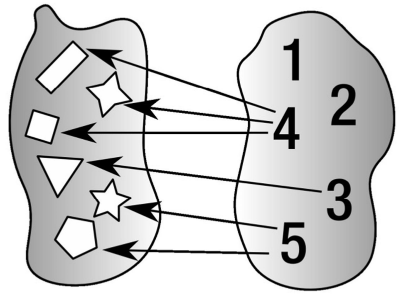
Funktionen – Grundsätzliches

Was ist eine Funktion?

Definition:
Eine Funktion ist eine eindeutige Zuordnung, bei der Elemente aus einer Definitionsmenge D eindeutig Elementen aus einer Wertemenge W zugeordnet werden.
Siehe Buch, S. 12–15

Beispiele

Funktion	keine Funktion
	
Mensch wird Mutter zugeordnet.	Mutter wird Kind zugeordnet.
Eine natürliche Zahl wird der nachfolgenden Zahl zugeordnet.	Eine natürliche Zahl wird Nachbar zugeordnet
Ein Land wird „seinem“ Kontinent zugeordnet Ausnahmen: Türkei, Russland etc. (liegen jeweils auf zwei Kontinenten)	Kontinent wird Land zugeordnet.
Land wird Hauptstadt zugeordnet.	Land wird Stadt zugeordnet.
Hauptstadt wird Land zugeordnet.	Land wird angrenzendem Nachbarland zugeordnet. Ausnahmen: Lesotho (liegt in Südafrika), manche Miniländer wie Vatikan, Inselstaaten ohne Nachbarn)
Uhrzeit wird Zeigerstand zugeordnet.	Zeigerstand wird Uhrzeit zugeordnet.
Mensch wird Größe zugeordnet.	Größe wird Mensch zugeordnet.
Mensch wird Geburtsort zugeordnet.	Geburtsort wird Mensch zugeordnet.
Zahl wird ihrem Quadrat („hoch 2“) zugeordnet.	Quadrat wird Ursprungszahl zugeordnet.

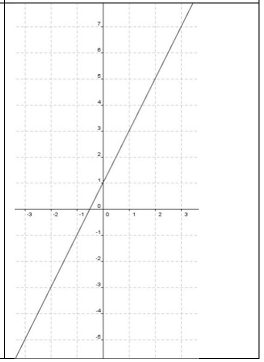
Darstellungsweisen von Funktionen

Eine mathematische Funktion lässt sich normalerweise auf drei Arten ausdrücken:
1. **Funktionsgleichung (eine Rechenvorschrift)**
2. **Wertetabelle**
3. **Graph**

Alle drei Darstellungsarten haben ihre Vorteile und Nachteile. Wichtig ist dabei zu beachten, dass keine dieser drei Darstellungsarten „die Funktion“ ist. Man kann den Graphen einer Funktion zeichnen und die Gleichung einer Funktion aufschreiben, aber niemals die Funktion. Die Funktion selbst ist ein unerreichbares Abstraktum.

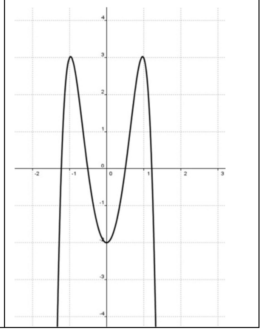
Beispiel:

Hier ist ein und dieselbe Funktion auf die drei erwähnten Weisen ausgedrückt.

<table>
<tr><th>Rechenvorschrift/
Funktionsgleichung</th><th>Wertetabelle</th><th>Graph</th></tr>
<tr><td>$f(x) = 2x + 1$</td><td>
<table>
<tr><th>x</th><th>f(x)</th></tr>
<tr><td>−2</td><td>−3</td></tr>
<tr><td>−1</td><td>−1</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>3</td></tr>
<tr><td>2</td><td>5</td></tr>
</table>
Diese Tabelle enthält nur wenige der möglichen Werte. Für x kann man noch alle anderen Zahlen einsetzen.</td><td></td></tr>
</table>

Noch Beispiel:

Hier ist eine kompliziertere Funktion auf die drei erwähnten Weisen ausgedrückt.

<table>
<tr><th>Rechenvorschrift/
Funktionsgleichung</th><th>Wertetabelle</th><th>Graph</th></tr>
<tr><td>$f(x) = -3x^6 + 8x^2 - 2$</td><td>
<table>
<tr><th>x</th><th>f(x)</th></tr>
<tr><td>−3</td><td>−2117</td></tr>
<tr><td>−2</td><td>−162</td></tr>
<tr><td>−1</td><td>3</td></tr>
<tr><td>0</td><td>−2</td></tr>
<tr><td>1</td><td>3</td></tr>
<tr><td>2</td><td>−162</td></tr>
<tr><td>3</td><td>−2117</td></tr>
</table>
</td><td></td></tr>
</table>

Begriffe bei Funktionen

Wie man in der Tabelle oben gesehen hat, enthält die Funktionsgleichung mehrere Buchstaben. Auf die Bedeutung dieser Buchstaben und andere wichtige Begriffe gehen wir im Folgenden ein.

Funktionsgleichung und Funktionsterm

- Die **Funktionsgleichung** ist das gesamte Gebilde mit einem „=“ darin. Ein Ausdruck ohne „=“ ist niemals eine Gleichung.
- Der **Funktionsterm** ist der Ausdruck, der meist rechts vom „=“ steht

$$\overbrace{f(x) = \underbrace{2x+1}_{\text{Funktionsterm}}}^{\text{Funktionsgleichung}}$$

Name und Variable

Bei der Funktionsgleichung oben ist
f der **Name** der Funktion
x die **Variable**

Dieselbe Funktion wäre auch mit der Gleichung $u(t) = 2t + 1$ auszudrücken. Dass meistens f und x benutzt werden, ist reine Willkür. Hauptsache, der Name steht vorne und in einer Klammer dahinter die Variable. Diese Ordnung ist sehr wichtig, da ansonsten Verwirrung mit weiteren vorkommenden Buchstaben entstehen kann.

Ursprungswert/Stelle, Funktionswert und Punkt

- Für die **Variable** kann man Zahlen einsetzen (welche: siehe unten, Abschnitt Definitionsmenge). Eine konkrete Zahl, die man einsetzt, bezeichnet man als **Ursprungswert** oder **Stelle.** Umgangssprachlich ist manchmal auch vom **x-Wert** die Rede. Wenn eine konkrete Stelle gemeint ist, deren Zahlenwert man aber nicht kennt, schreibt man meistens $\mathbf{x_0}$. Die 0 hat hierbei nur die Bedeutung, die konkrete Stelle von der allgemeinen Variable zu unterscheiden. Leider wird diese Schreibweise nicht immer ganz konsequent durchgehalten.
- Der **Funktionswert** ergibt sich, wenn man die Stelle in den Funktionsterm einsetzt. Im obigen Beispiel soll man die Stelle verdoppeln und 1 hinzuzählen. Wenn ein konkreter Funktionswert gemeint ist, dessen Zahlenwert man nicht kennt, schreibt man $\mathbf{f(x_0)}$
- Ein Paar aus Ursprungswert/Stelle und Funktionswert heißt **Punkt.** Einen konkreten Punkt, dessen Zahlenwerte man nicht kennt, schreibt man $\mathbf{(x_0 \mid f(x_0))}$

Beispiel:

$f(x) = 2x + 1$

	Stelle	Funktionswert	Punkt
	x_0	$f(x_0)$	$(x_0 \mid f(x_0))$
Zahlenbeispiele	5	$2 \cdot 5 + 1 = 11$	$(5 \mid 11)$
	-3	$2 \cdot (-3) + 1 = -5$	$(-3 \mid -5)$

Mengen in Bezug auf Funktionen

Es gibt zwei Mengen, die mit Funktionen zu tun haben und die ihr kennen solltet:

1. **Definitionsmenge**
2. **Wertemenge**

Definitionsmenge

Sie beinhaltet alle Zahlen, die man für die **Variable** einsetzen darf. Häufig sind das alle reellen Zahlen, manchmal aber auch nicht.

Zum Beispiel darf man bei der Funktion $k(z) = \frac{1}{z}$ nicht die Null einsetzen (der Nenner bei einem Bruch darf nicht Null sein). Man schreibt dann: $D = \mathbb{R} \setminus 0$ (alle reellen Zahlen außer Null)

Bei der Funktion $e(w) = \sqrt{w}$ darf man für w keine negativen Zahlen einsetzen, denn man kann aus negativen Zahlen keine Wurzeln ziehen.
$D = \mathbb{R}_0^+$ (alle positiven Zahlen und Null)

Wertemenge

Sie umfasst alle Werte, die tatsächlich bei einer Funktion als Funktionswerte herauskommen können. Das können z.B. alle reellen Zahlen sein, alle positiven, alle negativen, alle außer der Null usw. Man kann die Wertemenge erst ermitteln, wenn man sich mit einem Funktionstyp gut auskennt oder eine Funktionsuntersuchung gemacht hat.

Bei der Funktion $t(q) = 5q - 8$ ist die Wertemenge W = $\mathbb{R}$.
Bei der Funktion $a(s) = s^2$ ist die Wertemenge W = $\mathbb{R}_0^+$, denn es können keine negativen Zahlen herauskommen.

Aufgaben

Bestimme jeweils die maximale Definitionsmenge.

a. $a(x) = 0{,}5x^2$ b. $b(x) = \frac{10}{x}$ c. $c(x) = \sqrt[4]{x}$ d. $d(x) = \sqrt[3]{x}$

e. $e(x) = -0{,}5\sqrt[6]{x^2}$ f. $f(x) = \frac{x}{10}$ g. $g(x) = \frac{x^4}{9 - x^2}$ h. $h(x) = x^{-3} + x^{-0{,}5}$

Aufgaben im Buch

Seite	Aufgabe	Hinweise	Zu erledigen bis
12	1	Klingt kompliziert, ist es aber nicht.	
14	4	Pythagoras kann hier und da nützlich sein.	
14	5	GeoGebra ist zur Überprüfung erlaubt.	
15	6	–	