Ganzrationale Funktionen

Wie erkennt man ganzrationale Funktionen?

ganzrational	nicht ganzrational		ganzrational	nicht ganzrational
$f(x) = x$	$f(x) = \frac{1}{x}$		$m(x) = \sqrt{5}x$	$m(x) = \sqrt{5x}$
$g(y) = y$	$g(y) = y^{-1}$		$h(y) = 3^{-1}y^{1}$	$h(y) = (3y)^{-1}$
$z(a) = a^2 + 1$	$z(a) = a^{0,2} + 1$		$w(a) = -\sqrt{b}a^2 + 1$	$w(b) = -\sqrt{ba^2} + 1$
$r(n) = -n^2 + n - 5,3$	$r(n) = -n^{\frac{1}{2}} + n - 5,3$		$p(n) = -\frac{n^{11}}{3}$	$p(n) = -\frac{n^{0,3}}{11}$
$s(q) = -0,7q^{20}$	$s(q) = 20q^{-0,7}$		$k(q) = -0,7 \cdot q^{20}$	$k(q) = -0,7 : q^{20}$
$t(u) = (u+4)^2$	$t(u) = (u+4)^{-2}$		$ü(u) = (u+4)^2 : 3$	$ü(u) = (u+4)^2 : u$

Aufgaben dazu

1. Vergleiche die ganzrationalen Funktionen mit den jeweils danebenstehenden nicht ganzrationalen „Partnern“. Was fällt auf?

2. Versucht in Worten zu beschreiben, was alle ganzrationalen Funktionen gemeinsam haben und damit, wodurch sie sich von den ihnen ähnelnden nicht ganzrationalen Funktionen unterscheiden.

Die Grundform ganzrationaler Funktionsgleichungen

Jede ganzrationale Funktion hat eine Gleichung, die in folgende Form passt (auch wenn es zuerst nicht so scheinen mag):

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

Es gilt für diese Gleichung Folgendes (bitte unbedingt auswendig lernen!):

- n ist irgendeine natürliche Zahl. In Bezug auf die Funktion heißt sie **Grad.** Der Grad ist der höchste Exponent, der bei der Variablen steht.
- Die verschiedenen a_i sind allesamt reelle Zahlen (wobei a_n als einzige Zahl nicht Null sein darf – sonst hätte die Funktion nicht mehr den Grad n). Sie heißen **Koeffizienten.** Die kleinen Zahlen und Buchstaben rechts unten neben dem a dienen nur der Durchnummerierung.

Noch eine Aufgabe

3. Nimm dir nun die ganzrationalen Funktionsgleichungen aus der Tabelle vor (also nur die „linken“). Gib jeweils die Koeffizienten (jeden einzeln angeben), den Grad und die Variable an.

Um mit den ganzrationalen Funktionen vertraut zu werden, befassen wir uns zunächst mit den Spezialfällen der **linearen Funktionen** und den **quadratischen Funktionen**.

Lineare Funktionen

Lineare Funktionen (von lateinisch *linea* = (gerade) Linie) sind **ganzrationale Funktionen** mit dem **Grad 1**.

Ihre Grundform ist:

$f(x) = a_1x + a_0$ Häufig schreibt man auch: $f(x) = mx + b$

Die beiden Schreibweisen sind aber äquivalent (=gleichwertig).

Diese Funktionen heißen *linear*, weil ihr Graph eine **Gerade** ist.

Beispiele

$k(r) = -5r + 6$ $z(w) = \frac{3}{5}w - 2,5$ $q(x) = 3,7x$ $e(u) = 9,5 + 100u$

Kapitel im Buch und im Tafelwerk

- Die linearen Funktionen werden im Buch auf den Seiten 16 bis 30 behandelt. Wir werden meistens dem Verlauf des Buches folgen.
- Die wichtigsten Informationen zu den linearen Funktionen findet man im Tafelwerk auf Seite 21.

Pflichtaufgaben im Buch (Seiten 16–30)

		Zu erledigen bis	☺	😐	☹			Zu erledigen bis	☺	😐	☹
Steigung, Achsenschnitte	4					Orth.	20				
	5b					Mehrere Geraden	22				
	6						25				
	7						26				
Winkel	16						31				
	17					Anw.	32				

Weitere Anwendungsaufgaben

Die Bearbeitung solcher Aufgaben ist sehr wichtig, da im Abitur fast nur solche Anwendungen vorkommen.

a) Werner und Andreas veranstalten ein 200m-Wettrennen. Da Werner älter und langsamer ist als Andreas, bekommt er 12 Meter Vorsprung. Die beiden starten gleichzeitig. Andreas läuft 18 km/h, Werner 16 km/h. Zeige, dass Andreas das Rennen gewinnt und bestimme, nach welcher Zeit und nach welcher Strecke Werner überholt wird.

b) Nach dem Rennen leihen sich die beiden Quads und fahren auf eine Bergstraße. Dort steht ein Schild mit der Aufschrift „Steigung: 60%“. In der Gebrauchsanweisung der Quads steht: „Geeignet für Steigungen bis zu 35°“. Ermittle, ob die Straße für die beiden befahrbar ist.

Quadratische Funktionen

Quadratische Funktionen sind ganzrationale Funktionen mit dem Grad 2, sie haben also die Grundform

$\boxed{f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0}$ Häufig schreibt man auch: $\boxed{f(x) = ax^2 + bx + c}$

Man nennt sie *quadratisch,* weil eine Multiplikation einer Zahl mit sich selbst, also z.B. $5 \cdot 5 = 5^2$, ebenfalls *Quadrat* genannt wird.

Beispiele

$L(r) = 4r^2 + 2r - 5$ $\quad y(w) = -\frac{5}{8}w^2 + w + 1{,}2$ $\quad p(x) = 2x^2 + 3x$ $\quad f(u) = 7 + u^2$

Die drei Formen quadratischer Funktionsgleichungen

Die Form als Polynom

$f(x) = ax^2 + bx + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$

- Wie ihr wisst, liegt bei $(0 \mid c)$ der y-Achsenschnittpunkt.
- Am Parameter a kann man ablesen, ob der Graph der Funktion, die Parabel, im Verhältnis zur Normalparabel gestaucht oder gestreckt ist und in welche Richtung er geöffnet ist:

$|a| > 1 \Rightarrow$ Parabel ist gestreckt. $\quad a < 0 \Rightarrow$ Parabel ist nach unten geöffnet.

$|a| < 1 \Rightarrow$ Parabel ist gestaucht. $\quad a > 0 \Rightarrow$ Parabel ist nach oben geöffnet.

$|a| = 1 \Rightarrow$ Parabel ist weder gestreckt noch gestaucht. $\quad a = 0$ ist nicht erlaubt.

Die Scheitelpunktsform

$f(x) = a(x - x_s)^2 + y_s$ mit $a, x_s, y_s \in \mathbb{R}$

Hier kann man gut den Scheitelpunkt (Tief- oder Hochpunkt) des Graphen ablesen, er liegt bei $(x_s \mid y_s)$. Man kann sagen, der Graph der Funktion gegenüber der Normalparabel um x_s parallel zur x-Achse und um y_s parallel zur y-Achse verschoben wurde, dazu kommen Streckungen und Stauchungen sowie die Öffnungsrichtung, abhängig vom Parameter a, wie oben erklärt.

Die Darstellung als Linearfaktoren

$f(x) = a(x - x_{N1})(x - x_{N2})$ mit $a, x_{N1}, x_{N2} \in \mathbb{R}$

In dieser Form kann man gut die Nullstellen der Funktion ablesen, sie sind x_{N1} und x_{N2}. Für a gilt das Übliche.

Die Umrechnungen der drei Formen in die jeweils anderen besprechen wir an der Tafel.

Aufgabe

4. Wandle die angegebenen Funktionsgleichungen in die beiden nicht angegebenen Formen um. Gib dann den Scheitelpunkt und die Achsenschnittpunkte an. Zeichne den Graphen.

a. $a(x) = (x - 3)(x + 2)$ $\quad$ b. $b(x) = (x + 1)^2 - 2{,}25$ $\quad$ c. $c(x) = \frac{1}{4}(x - 3)^2 - 2{,}25$

d. $d(x) = -2x^2 + 8x - 6$ $\quad$ e. $e(x) = 3(x + 1)^2 - 3$ $\quad$ f. $f(x) = -\frac{3}{2}x^2 - 3x + \frac{9}{2}$

Kapitel im Buch und im Tafelwerk

- Die quadratischen Funktionen werden im Buch auf den Seiten 31 bis 45 behandelt. Wir werden meistens dem Verlauf des Buches folgen.
- Die wichtigsten Informationen zu den quadratischen Funktionen findet man im Tafelwerk auf Seite 22.

Pflichtaufgaben im Buch (Seiten 33–48)

		Zu erledigen bis	☺	😐	☹
Manipulation	10				
	12				
	13				
Anw.	23				
Geraden	26				
Anwendungen	30				
	38				
	39