Nullstellenberechnung

Definition

Nullstellen sind die Stellen einer Funktion, deren Funktionswert 0 ist. Für eine Nullstelle x_n gilt also immer:

$$\boxed{f(x_n) = 0}$$

Anschauliche Bedeutung

An den Nullstellen schneidet oder berührt der Graph die x-Achse.

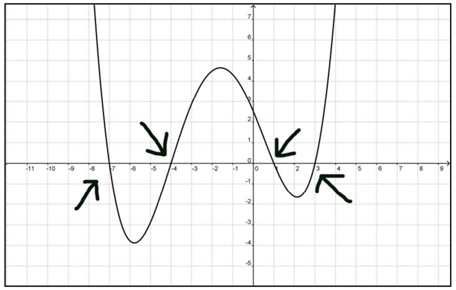
Im Beispiel rechts lauten die Nullstellen (von links nach rechts):

$x_{N1} = -7$

$x_{N2} = -4$

$x_{N3} = 1$

$x_{N4} = 3$



Nullstellenberechnung: Lineare und quadratische Funktionen

Aufgaben

1. Berechne die Nullstellen der folgenden Funktionen, indem du den Funktionsterm gleich Null setzt und die entstehende Gleichung nach der Variable auflöst.

a) $a(z) = 3z + 1$ b) $b(z) = 5 - 2z$ c) $c(z) = z^2 + 6z + 5$

d) $d(z) = 4 - 3z - z^2$ e) $e(z) = -2z + 4z^2 - 2$ f) $f(z) = -0,5z^2 + 3z + 8$

2. Quadratische Funktionen können unterschiedliche Erscheinungsformen haben: **Polynomform, Scheitelpunktform** und **Linearfaktorform**. Mit diesen haben wir uns schon beschäftigt. Berechne hier jeweils die Nullstellen. Forme gegebenenfalls den Funktionsterm um. Vergleiche dann die Nullstellen mit der Funktionsgleichung. Was fällt dabei auf?

Polynomform:	Scheitelpunktform:	Linearfaktorform:
a) $a(t) = 2t^2 - 4t - 6$	b) $b(z) = (z+4)^2 - 4$	c) $c(t) = 3(t-5)(t+2)$

Vermutung:

Linearfaktoren und Polynome bei ganzrationalen Funktionen

Definition Linearfaktor

In einem Produkt heißt ein Faktor der Form $(x - d)$ mit $d \in \mathbb{R}$ **Linearfaktor**. Wichtig ist, dass bei dem x kein Exponent außer 1 steht. $(x - 4)$ ist also ein Linearfaktor, aber $(x^3 - 4)$ ist keiner.

Satz

$x_{N1}, x_{N2}, x_{N3}, \dots, x_{Nk} \in \mathbb{R}$ sind genau dann die Nullstellen einer ganzrationalen Funktion f, wenn sich die Funktion folgendermaßen schreiben lässt: $f(x) = a \cdot (x - x_{N1}) \cdot (x - x_{N2}) \cdot (x - x_{N3}) \cdot \ldots \cdot (x - x_{Nk})$. $(a \in \mathbb{R} \setminus 0)$. Dabei dürfen Nullstellen doppelt vorkommen, also es darf z.B. $x_{N2} = x_{N5}$ sein.

Beispiele

$b(x) = (x-2) \cdot (x-5) \cdot (x+3)$ hat die Nullstellen $x_{N1} = -3$, $x_{N2} = 2$, $x_{N3} = 5$

$b(t) = 7 \cdot (t+6) \cdot (t-9) \cdot (t-4)^2$ hat die Nullstellen $t_{N1} = -6$, $t_{N2} = 9$, $t_{N3} = 4$

Definition Polynom

Die bekannte Form ganzrationaler Funktionsterme

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ heißt **Polynom.**

Aufgaben

3. Begründe folgende wichtige Aussagen:

a. Eine Funktion n-ten Grades kann nur in maximal n Linearfaktoren zerlegt werden.
b. Eine Funktion n-ten Grades hat maximal n Nullstellen.

4. Rechne die folgenden ganzrationalen Funktionen in ihre Polynomform um, indem du die Klammern ausmultiplizierst. Nenne jeweils alle Nullstellen.

a) $a(x) = (x+5)(3-x)$ b) $b(x) = (x-2)(x+3)(x-1)$

c) $c(x) = 2(x-3)(x+2)^2$ d) $d(x) = 4(x-3)^2(5+2x)$

Grundlegende Methoden der Nullstellenberechnung

Zusätzlich zu den Methoden, die ihr von linearen und quadratischen Funktionen kennt, gibt es für höhergradige Funktionen folgende Methoden:

Höhere Wurzeln ziehen

Anzuwenden, wenn Funktionsterme nur aus einer Potenz der Variablen und einer addierten/subtrahierten Zahl bestehen.

Beispiel:

$h(d) = d^{10} - 1024$ geht es einfach so:

$d^{10} - 1024 = 0 \quad \Rightarrow \quad d^{10} = 1024$

$\Rightarrow \quad d = \sqrt[10]{1024} \quad \Rightarrow \quad d_{N1/N2} = \pm 2$

Obacht: Die Anzahl möglicher Lösungen hängt von einigen Faktoren ab:

Gerade Wurzel, positive Zahl unter der Wurzel ➔ Zwei Lösungen	Gerade Wurzel, negative Zahl unter der Wurzel ➔ Keine Lösung
Gerade Wurzel, 0 unter der Wurzel ➔ Eine Lösung: 0	Ungerade Wurzel ➔ immer genau eine Lösung

Ausklammern

Anzuwenden, wenn in allen mit + oder – verbundenen Gliedern die Variable vorkommt.

Beispiel:

$r(d) = d^{12} - 2d^{11} - 3d^{10}$

Hier macht man sich die Distributivgesetze (→Tafelwerk) zunutze und kann etwas ausklammern, hier nämlich d^{10}:

$r(d) = d^{10}(d^2 - 2d - 3)$

Nun hat man ein Produkt aus d^{10} und der Klammer.
Dann kann man die beiden Faktoren getrennt voneinander $= 0$ setzen und erhält so alle Nullstellen. Dieses Verfahren bringt zunächst natürlich nur etwas, wenn in der Klammer etwas maximal Quadratisches steht.

Substitution

Das ist ein lustiger Trick, der bei Funktionen funktioniert, die aus drei Gliedern bestehen, die diese Bedingungen erfüllen:

- In einem Glied kommt die Variable in der **Potenz 2p** vor (p ist dabei irgendeine positive ganze Zahl),
- in einem Glied kommt die Variable in der **Potenz p** vor
- im letzten gar nicht.

Beispiel:

$j(d) = 5d^{28} + 35d^{14} - 60$ Hier ist $p = 14$.

Hier kann man die niedrigere Potenz durch einen anderen Buchstaben ersetzen (substituieren): $d^{14} = k$

Dann lautet die Funktion plötzlich:
$j(k) = 5k^2 + 35k + 60$ und lässt sich mit der PQ-Formel bearbeiten. Hat man eine Lösung für k, muss man wieder **resubstituieren**, also $k = d^{14}$ setzen, um die „wahren“ Nullstellen auszurechnen.

Raten/Ausprobieren, Taschenrechner und andere Hilfsmittel

Wenn wir es mit höhergradigen Funktionen zu tun haben, die nicht in eine der Formen oben passen, dann können wir nur **Raten/Ausprobieren** oder die Lösungsmöglichkeiten des **Taschenrechners** benutzen.

Beispiel: $g(d) = -d^3 - d^2 + d + 1$

Hier kann man schnell erraten, dass 1 eine Lösung ist.
Die -1 als zweite Lösung hat man auch recht schnell gefunden.

Man weiß aber nicht, ob es nicht noch eine mysteriöse dritte Lösung gibt, daher muss man hier das (nicht mehr in der Schule vorkommende) Verfahren der Polynomdivision benutzen oder eben ein elektronisches Gerät benutzen.

Aufgaben zur Nullstellenberechnung (Wurzeln bis Substitution)

5. Berechne alle Nullstellen der angegebenen Funktionen mithilfe der „höheren Wurzeln“.

a. $a(s) = s^3 + 27$
b. $b(s) = s^{10} + 1048576$
c. $c(s) = s^4 - 625$
d. $d(s) = s^{80}$

6. Berechne alle Nullstellen der angegebenen Funktionen mithilfe von Ausklammern. Welche Nullstelle tritt hier immer auf?

a. $a(k) = k^6 - 3k^5$
b. $b(k) = k^3 - 5k^2 - 14k$
c. $c(k) = 3k^3 - 27k$
d. $d(k) = 2k^3 + 2k^2 - 7{,}5k$

7. Berechne alle Nullstellen der angegebenen Funktionen mithilfe der Substitution.

a. $a(u) = u^4 - 13u^2 + 36$
b. $b(u) = 3u^4 - 123u^2 + 1200$
c. $c(u) = -2u^6 + 38u^3 + 432$
d. $d(u) = u^8 - 257u^4 + 256$

Anwendungen der Nullstellenrechnung

Die Methoden, die man bei der Berechnung von Nullstellen benutzt, sind für viele andere Probleme nutzbringend, bzw. stehen mit anderen Problemen in Zusammenhang.

Berechnung von gemeinsamen Punkten zweier Funktionen

Sehr häufig muss man die gemeinsamen Punkte zweier Funktionen berechnen (Schnittpunkte der Graphen), also Punkte, an denen sowohl Stelle als auch Funktionswert übereinstimmen.

Als Beispiel sollen die gemeinsamen Punkte von $f(x) = 2x^2 - 7$ und $g(x) = x^2 - x + 5$ bestimmt werden.

Dafür muss man die Funktionsterme gleich setzen: $2x^2 - 7 = x^2 - x + 5$

Um diese Gleichung zu lösen, bringt man *alles* auf eine Seite: $x^2 + x - 12 = 0$

Diese Gleichung lässt sich nun nach den Methoden der Nullstellenberechnung lösen. Um letzten Endes die gemeinsamen Punkte zu erhalten, muss man die Lösung(en) dieser Gleichung (hier: 3 und –4) in einen der beiden Funktionsterme einsetzen:

$f(3) = 2 \cdot 3^2 - 7 = 11$

$f(-4) = 2 \cdot (-4)^2 - 7 = 25$

Die gemeinsamen Punkte sind deshalb: $P_1(3 \mid 11)$ $P_2(-4 \mid 25)$

Aufgabe

8. Berechne jeweils die gemeinsamen Punkte der beiden angegebenen Funktionen.

a) $a_1(x) = x^2 - 3x + 1$ $a_2(x) = -x^2 + 3x + 21$	b) $b_1(x) = x^3 - 4x$ $b_2(x) = -x^2 + 4$
d) $c_1(x) = -x^3 + 3x^2$ $c_2(x) = -28x$	d) $d_1(x) = x^4 + 4$ $d_2(x) = 8x^2 - 12$

Das Pascalsche Dreieck – höhere binomische Formeln

Dies ist keine Anwendung der Nullstellenrechnung, sondern eine Rechen-Hilfe, wenn man bestimmte Linearfaktor-Ausdrücke in Polynome umrechnen will.

Aufgabe

9. Finde heraus, wie eine Zeile des Pascalschen Dreiecks aus der vorigen entsteht.

10. Rechne $(a + b)^3$ und $(a + b)^4$ in ein Polynom um. Vergleiche das Ergebnis mit der dritten bzw. vierten Zeile aus dem Pascalschen Dreieck und stelle eine begründete Vermutung an.

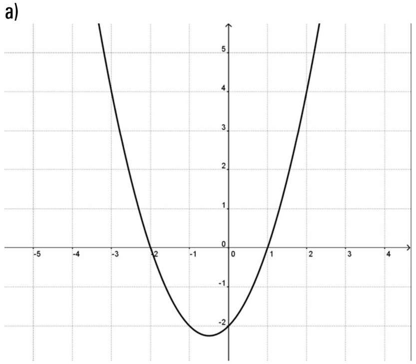
11. Rechne die folgenden Linearfaktorpotenzen mithilfe des P.D. in Polynome um: $(x + 3)^4$ $(2x - 4)^3$ $(x + 2)^6$

Das Pascalsche Dreieck

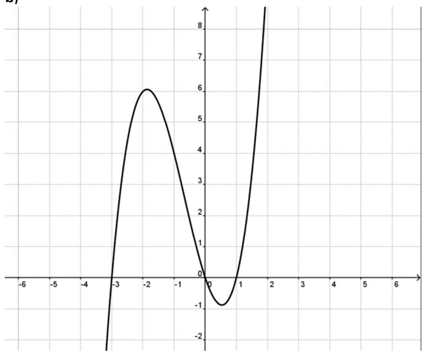
1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
....

12. Hier siehst du vier Funktionsgraphen. Versuche, auf Basis begründeter Überlegungen die Funktionsgleichung in Polynomform aufzustellen (es sind aber Umwege nötig). Hinweis: In jeder Gleichung steht vor der höchsten x-Potenz keine Zahl außer der 1.

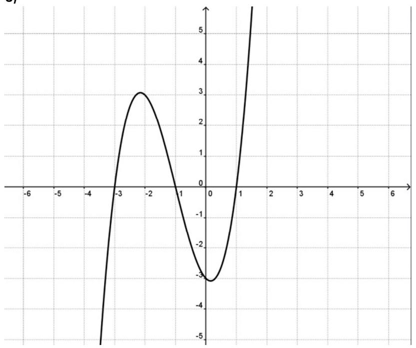
a)



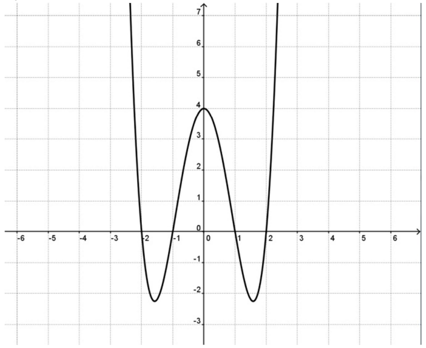
b)



c)



d)



Hier ist Platz zum Rechnen und für eine Zeichnung von Batman: