Steigung und Ableitung

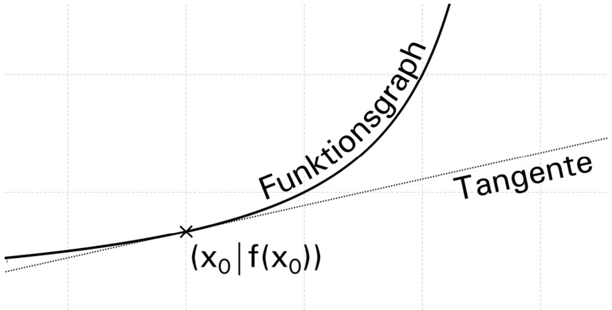
Die Steigung einer Funktion mit kurvigem Graphen

Kurvensteigung & Tangentensteigung

Das Problem bei Kurven ist, dass sie keine durchgängig gleichbleibende Steigung haben. Die Steigung ändert sich von Punkt zu Punkt. Deshalb brauchen wir die folgende...

Definition

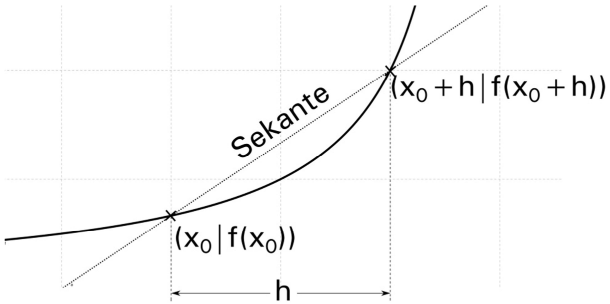
Die **Steigung einer Kurve** in einem Punkt ist identisch mit der **Steigung der Tangente** (= Berührende) an diesem Punkt.



Wenn wir nun die Steigung in einem Punkt $(x_0 \mid f(x_0))$ herausfinden wollen, brauchen wir „nur noch" die Steigung der Tangente an diesem Punkt. Diese lässt sich allerdings nicht herausfinden, wenn wir nur die Funktionsgleichung und einen Punkt auf dem kurvigen Graphen kennen. Wir gehen deshalb einen Umweg:

Tangentensteigung & Sekantensteigung

Zunächst sehen wir uns eine Sekante durch $(x_0 \mid f(x_0))$ an. Eine Sekante ist eine Gerade, die den Funktionsgraph an einem bestimmten Punkt nicht berührt, sondern schneidet. Diese Sekante soll den Graph etwas weiter rechts noch einmal schneiden.



Aus praktischen Gründen wurde der zweite Schnittpunkt mit $(x_0 + h \mid f(x_0 + h))$ bezeichnet, so dass der Abstand zwischen den beiden Stellen genau h beträgt.

Berechnung der Sekantensteigung

Nach der Formel für die Geradensteigung kann leicht die Steigung der Sekante berechnet werden:

$$m_S = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung heißt **Differenzenquotient.**

Von der Sekantensteigung zur Tangentensteigung

Um nun von der Sekanten- zur Tangentensteigung zu gelangen, lässt man den Abstand h der beiden Stellen winzig klein werden, so dass sich die beiden Punkte aufeinander zu bewegen und so schließlich „miteinander verschmelzen". Dazu benutzt man einen Grenzwertprozess, bei dem man h gegen Null laufen lässt:

Hier ist also die Steigung der Tangente durch $(x_0 \mid f(x_0))$:

$$m_T = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung wird **Differentialquotient** genannt.

Aufgabe 1

Berechne die Steigungen der Graphen der angegebenen Funktionen an den jeweils angegebenen Stellen.

$a(x) = 5x^2 + 2 \quad x_0 = 3$	$b(x) = 0{,}1x^2 - 11 \quad x_0 = -2$	$c(x) = x^3 - 1 \quad x_0 = 5$

Die Ableitungsfunktion

Natürlich kann man in den **Differentialquotienten** jede beliebige Stelle der ursprünglichen Funktion einsetzen. Jeder Stelle wird so eine Steigung zugeordnet. Diese offensichtlich eindeutige Zuordnung ist eine Funktion, die so genannte **Ableitungsfunktion,** bezeichnet als $f'(x)$. (Lies: „f Strich von x").

Definition der Ableitung

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

Nur dies ist die Definition der Ableitung. Alles, was wir künftig zur vereinfachten Berechnung der Ableitung herausfinden werden, ist wirklich nur Vereinfachung, nicht Definition.

Mithilfe der Ableitungsfunktion können wir die Steigung der ursprünglichen Funktion an jeder beliebigen Stelle, die man für die Variable x einsetzen kann, berechnen.

Aufgabe 2

a) Berechne jeweils die Ableitungsfunktion der angegebenen Funktion.
b) Was fällt auf, wenn du die Ableitungen der jeweils übereinander stehenden Funktionen miteinander vergleichst?
c) Vergleiche jeweils die Ableitung mit der Ursprungsfunktion. Welche Regelmäßigkeit fällt hier auf?
d) Benutze die Ableitungsfunktion, um die Steigung des Funktionsgraphen an je zwei selbst gewählten Stellen zu ermitteln.

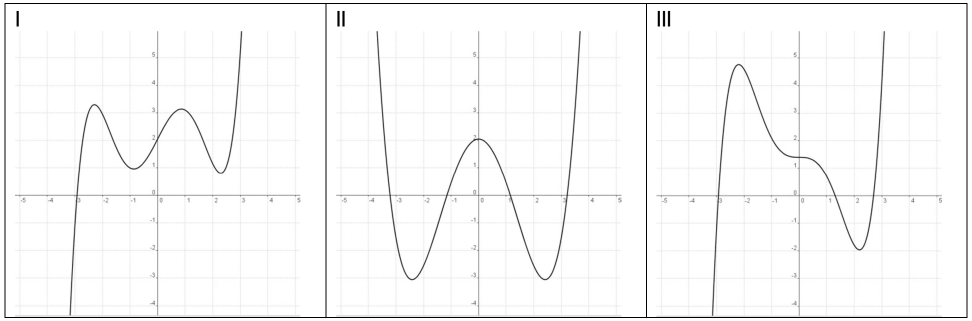
$d(x) = x^2$	$f(x) = 4x^2$	$h(x) = x^2 - 2x$
$e(x) = x^3$	$g(x) = 5x^2$	$i(x) = x^2 - 6x$

Graphisches Ableiten I

Man kann die Ableitungsfunktion auch graphisch bestimmen. Das Verfahren dazu wird an der Tafel erläutert.

Aufgabe 3

Leite die Funktionen, deren Graphen hier gegeben sind, im Heft/er zweimal graphisch ab (bilde also die ersten beiden Ableitungen). Du kannst die Ableitungen in ein einziges Koordinatensystem zeichnen, sofern du, z.B. mit verschiedenen Farben, die Übersicht behältst.



Ableiten leicht gemacht

Ableitung einfacher Potenzfunktionen

Für alle Funktionen, die sich als Potenz schreiben lassen, gilt:

$$f(x) = x^r \quad \Rightarrow \quad f'(x) = r \cdot x^{r-1} \qquad r \in \mathbb{R}$$

Beispiele

$$f(x) = x^4 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 4x^3$$

$$f(x) = \frac{1}{x^3} = x^{-3} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -3x^{-4} = -\frac{3}{x^4}$$

$$f(x) = 5 = 5x^0 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0x^{-1} = 0$$

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{0,5} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0,5 \cdot x^{-0,5} = 0,5 \cdot \frac{1}{x^{0,5}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Grundlegende Ableitungsregeln

$$f(x) = g(x) \pm h(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$$

$$f(x) = a \cdot g(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = a \cdot g'(x) \qquad a \in \mathbb{R}$$

Beispiele

$$f(x) = x^4 + 9x^{-2} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 4x^3 - 18x^{-3}$$

$$f(x) = 3x^5 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 15x^4$$

Höhere Ableitungen

Natürlich kann man Ableitungsfunktionen auch ableiten. Man produziert dann die zweite, dritte, vierte … Ableitung: $f''(x)$, $f'''(x)$, $f''''(x)$ usw.

Beispiel

$f(x) = 2x^3$ $\qquad f''(x) = 12x^1 = 12x$ $\qquad f''''(x) = 0 \cdot 12x^{-1} = 0$

$f'(x) = 6x^2$ $\qquad f'''(x) = 12x^0 = 12$ $\qquad f'''''(x) = 0$

Aufgabe 4

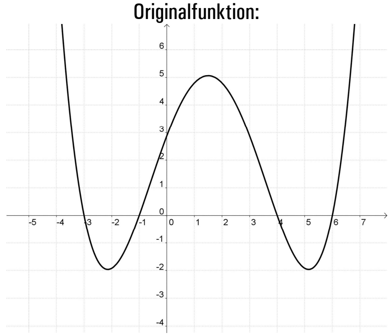
a) Bestimme jeweils die ersten drei Ableitungen der angegebenen Funktionen.
b) Berechne mithilfe der ersten Ableitung jeweils die Steigung des Graphen der Ursprungsfunktion an der Stelle 2.

$j(x) = x^2$	$m(x) = 12x^5$	$p(x) = \sqrt{x} + 7\sqrt{x}$
$k(x) = x^3$	$n(x) = 10x^7 + 4x^6$	$q(x) = \frac{3}{x^5} + 1,5x^{-4}$
$l(x) = x^4$	$o(x) = 8x^9 - 3x^{0,2}$	$r(x) = 1$

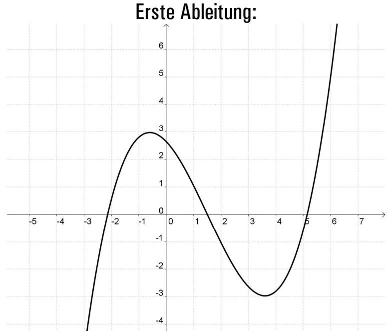
Krümmungsverhalten

Wir betrachten den Graphen einer Funktion und ihre ersten beiden Ableitungsgraphen:

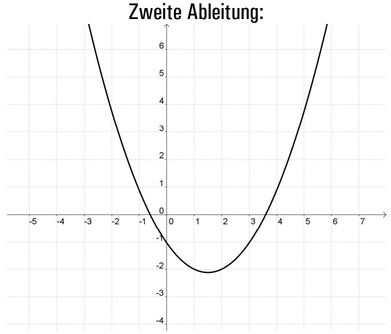
Originalfunktion:



Erste Ableitung:



Zweite Ableitung:



Aufgabe 5

a) Markiere die Abschnitte der Originalfunktion, auf denen sich der Graph nach rechts krümmt, grün und die Abschnitte, auf denen er sich nach links krümmt, rot.
b) Markiere auf den Intervallen, auf denen du den Originalgraphen rot/grün markiert hast, auch die Ableitungsgraphen rot/grün. Was fällt auf?

Hier ist Platz für die richtige Antwort zu 5b, sie ist wichtig für die Zukunft:

Aufgabe 6

Bestimme jeweils das Krümmungsverhalten der Funktion an den jeweils angegebenen Stellen x_1 usw.:

a) $a(x) = x^2 - 3$ $\quad x_1 = 5 \quad x_2 = -3 \quad x_3 = 0$
b) $b(x) = -2x^4 + 10x^3 + 12$ $\quad x_1 = 10 \quad x_2 = 1 \quad x_3 = 0$
c) $c(x) = 19x^2 - 4x^4$ $\quad x_1 = -2 \quad x_2 = -3 \quad x_3 = 0$

Aufgabe 7

a) Bestimme das Krümmungsverhalten der Funktion

$$i(x) = x^4 - 0,2x^3 - 5x^2 - 5x + 2$$

an allen ganzzahligen Stellen zwischen –4 und 4.
b) Mache eine Aussage darüber, wie oft sich das Krümmungsverhalten anscheinend ändert.
c) Welche Möglichkeit gibt es, die Anzahl der Krümmungswechsel rechnerisch exakt herauszufinden?
d) Was ist resultierend aus c) die Maximalanzahl der Krümmungswechsel einer ganzrationalen Funktion n-ten Grades?