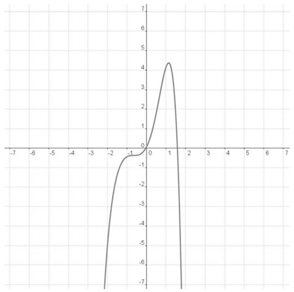
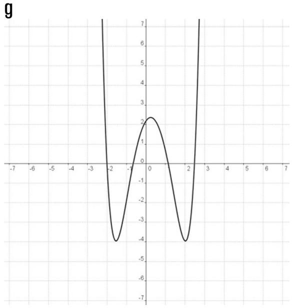
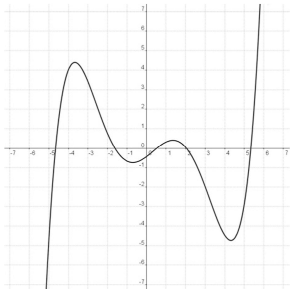
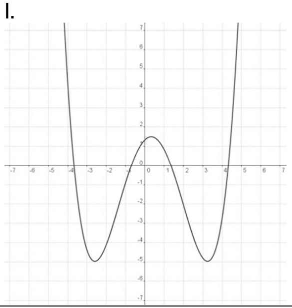
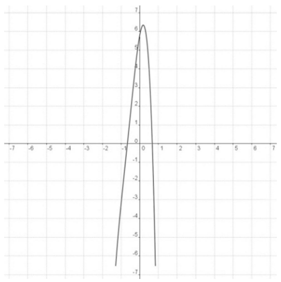
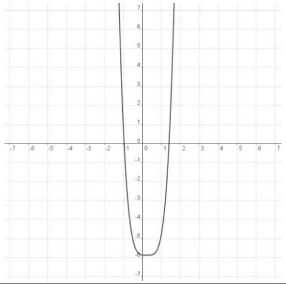
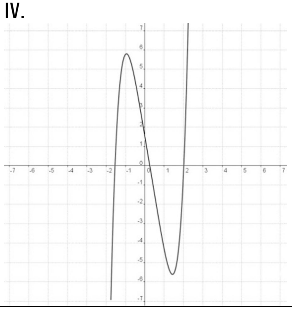
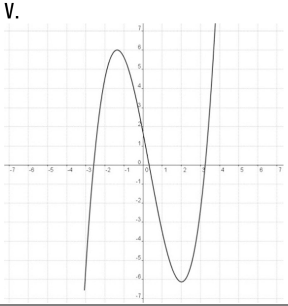
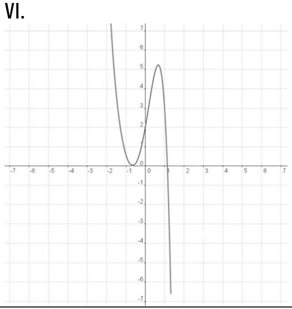
Graphisches Ableiten II

Übungen dazu

1. In der oberen Zeile der Tabelle sind drei Funktionsgraphen (zu den Funktionen f, g und h) gegeben. Darunter siehst du sechs weitere Graphen (I–VI). Ordne nun den Funktionen f, g und h jeweils die ersten beiden Ableitungen zu, die sich unter den Graphen I–VI verbergen.

f	g	h
		
f′(x):	g′(x):	h′(x):
f′′(x):	g′′(x):	h′′(x):

I.	II.	III.
		
IV.	V.	VI.
		

2. Vergleiche die Ableitungen aus den vorigen Aufgaben mit den jeweiligen Ursprungsfunktionen. Was fällt bezüglich der jeweiligen charakteristischen Punkte auf? Ergänze:

An den Extremstellen der Originalfunktion ...

An den „normalen" Wendestellen der Originalfunktion ...

An den Sattelstellen der Originalfunktion ...

Zusatzaufgaben für Schnelle:

3. Versuche bei den Funktionen aus 1 und 2 den Graph der *Stammfunktion* zu zeichnen. Die Stammfunktion ist gewissermaßen das Gegenteil der Ableitung – unsere Ursprungsfunktion ist die Ableitung der Stammfunktion.

4. Bilde von den Funktionen aus Aufgabe 1 auf graphische Weise so lange Ableitungen, bis diese sich nicht mehr verändern.

Das Finden der Extrema

1. Das notwendige Kriterium: Berechnung der Nullstellen von f'(x)

Da an jedem Extremum die Steigung und damit die erste Ableitung gleich Null ist, müssen wir zunächst alle Stellen suchen, für die gilt:

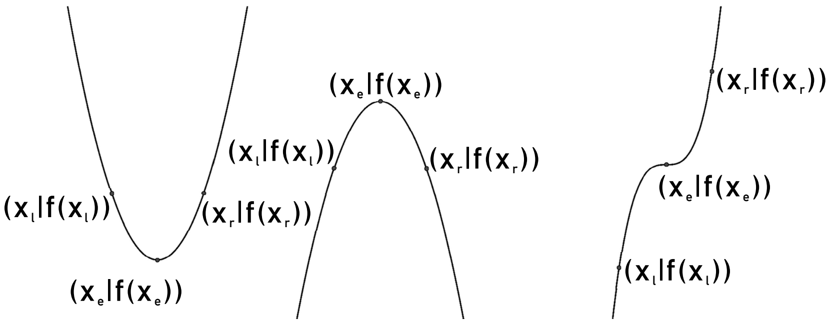
$$\boxed{f'(x) = 0}$$

Das heißt nichts anderes, als dass wir die Nullstellen der ersten Ableitung bestimmen müssen.

2. Die hinreichenden Kriterien

Wie ihr wisst, ist nicht nur an Extremstellen die erste Ableitung gleich Null, sondern auch an Sattelstellen. Daher brauchen wir Instrumente, um Sattelstellen von Extremstellen zu unterscheiden. Dies sind die hinreichenden Kriterien. Man muss immer nur eines davon anwenden – welches, ist grundsätzlich egal.

Für alle drei Verfahren soll die Skizze unten hilfreich sein. Wir nennen die mögliche Extremstelle immer x_e und Stellen links und rechts davon x_l, bzw. x_r.



Erstes hinreichendes Kriterium: Überprüfung umliegender Funktionswerte

$\left.\begin{matrix} f(x_e) < f(x_l) \\ \text{und} \\ f(x_e) < f(x_r) \end{matrix}\right\} \Rightarrow x_e$ ist Minimum. $\left.\begin{matrix} f(x_e) > f(x_l) \\ \text{und} \\ f(x_e) > f(x_r) \end{matrix}\right\} \Rightarrow x_e$ ist Maximum.	$\left.\begin{matrix} f(x_e) > f(x_l) \text{ und } f(x_e) < f(x_r) \\ \text{oder} \\ f(x_e) < f(x_l) \text{ und } f(x_e) > f(x_r) \end{matrix}\right\} \Rightarrow x_e$ ist Sattelstelle.

Man prüft also, ob der Funktionswert des möglichen Extremums höher oder niedriger als die der Punkte in unmittelbarer Nachbarschaft ist.

Zweites hinreichendes Kriterium: Überprüfung umliegender Steigungswerte (Vorzeichenwechselkriterium)

$\left.\begin{matrix} f'(x_l) < 0 \\ \text{und} \\ f'(x_r) > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x_e$ ist Minimum. $\left.\begin{matrix} f'(x_l) > 0 \\ \text{und} \\ f'(x_r) < 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x_e$ ist Maximum.	$\left.\begin{matrix} f(x_l) > 0 \text{ und } f(x_r) > 0 \\ \text{oder} \\ f(x_l) < 0 \text{ und } f(x_r) < 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x_e$ ist Sattelstelle.

Man bestimmt also, ob der Graph der Funktion rechts und links von der möglichen Extremstelle steigt oder fällt und zieht daraus die entsprechenden Rückschlüsse.

Drittes hinreichendes Kriterium: Überprüfung mit höheren Ableitungen

Bei diesem Verfahren betrachtet man die Krümmung des Graphen:

- An Tiefpunkten sind Graphen immer linksgekrümmt.
- An Hochpunkten immer rechts herum.
- An Sattelpunkten gibt es keine Krümmung, sondern einen Krümmungswechsel.

Zur Krümmungsbestimmung benutzen wir die zunächst zweite Ableitung. Man muss aber beachten, dass man nichts zur Krümmung sagen kann, wenn die zweite Ableitung den Wert Null hat. Dann muss man höhere Ableitungen nach folgenden Schema benutzen:

$f''(x_e) > 0 \quad \Rightarrow x_e$ ist Minimum.
$f''(x_e) < 0 \quad \Rightarrow x_e$ ist Maximum.
$f''(x_e) = 0 \quad \Rightarrow ???$ $\longrightarrow$ $f'''(x_e) \neq 0 \quad \Rightarrow x_e$ ist Sattelstelle.
$f'''(x_e) = 0 \quad \Rightarrow ???$

$f''''(x_e) > 0 \quad \Rightarrow x_e$ ist Minimum.
$f''''(x_e) < 0 \quad \Rightarrow x_e$ ist Maximum.
$f''''(x_e) = 0 \quad \Rightarrow ???$ $\longrightarrow$ $f'''''(x_e) \neq 0 \quad \Rightarrow x_e$ ist Sattelstelle.
$f'''''(x_e) = 0 \quad \Rightarrow ???$

usw.

Entscheidend ist letztlich, welche Ableitung als erste ungleich 0 wird: Eine gerade Ableitung oder eine ungerade.

3. Bestimmung des Extrempunkts

Zum Schluss müssen wir (falls wir nicht das erste hinreichende Kriterium benutzt haben) die bestätigte Extremstelle in den Funktionsterm einsetzen und den jeweiligen Extrempunkt berechnen.

Aufgabe zu den Extrema

Untersuche die angegebene Funktion jeweils auf Extrema und Sattelpunkte. Gib jeweils die kompletten Punkte an. Probiere unterschiedliche hinreichende Kriterien aus, um herauszufinden, welches dir am besten gefällt.

$a(x)=-x^2+6x-2$	$b(x)=3x^2-3x+3$	$c(x)=9x^4-12$	$d(x)=x^4-2{,}5x^3-2x+6$
$e(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{9}{4}x^2-3$	$f(x)=0{,}5x^3+2x^2$	$g(x)=-x^4+2x^2+4$	$h(x)=x^3+4$
$i(x)=-5x^5+10$	$j(x)=-1{,}8x^5+3x^3+0{,}5$	$k(x)=-x^4-\frac{8x^3}{3}+1$	$l(x)=x^5-\frac{10}{3}x^3+5x$

Das Finden der Wendepunkte

Man kann sich zunutze machen, dass die Wendestellen der ursprünglichen Funktion die Extremstellen der ersten Ableitung sind. Daher sind die notwendigen und hinreichenden Kriterien sehr ähnlich.

1. Das notwendige Kriterium: Nullstellen von f''(x)

Da an jedem Wendepunkt die Krümmung Null sein muss, hat auf jeden Fall die zweite Ableitung auch den Wert Null. Zuerst sucht man also die Nullstellen der zweiten Ableitung:

$$\boxed{f''(x)=0}$$

2. Die hinreichenden Kriterien

Das erste und zweite hinreichende Kriterium…

…lassen sich von den Extrema direkt auf die Wendepunkte übertragen. Man muss nur alles eine Ableitung höher ausführen!

Das dritte hinreichende Kriterium

Dieses Kriterium ist ebenfalls sehr ähnlich zum dritten hinreichenden Kriterium bei den Extrema. Da es am beliebtesten ist, stelle ich es hier schematisch dar:

x_w sei eine mögliche Wendestelle. Man weiß also: $f''(x_w)=0$. Dann setzt man x_w zunächst in die dritte Ableitung ein und folgt dem Schema (Ws = Wendestelle).

$f'''(x_w)>0 \quad \Rightarrow x_w$ ist Rechts-Links-Ws.
$f'''(x_w)<0 \quad \Rightarrow x_w$ ist Links-Rechts-Ws.
$f'''(x_w)=0 \quad \Rightarrow ???$ $\longrightarrow$

$f''''(x_w)\neq 0 \quad \Rightarrow x_w$ ist keine Wendestelle.
$f''''(x_w)=0 \quad \Rightarrow ???$

$f'''''(x_w)>0 \quad \Rightarrow x_w$ ist Rechts-Links-Ws.
$f'''''(x_w)<0 \quad \Rightarrow x_w$ ist Links-Rechts-Ws.
$f'''''(x_w)=0 \quad \Rightarrow ???$ $\longrightarrow$

$f''''''(x_w)\neq 0 \quad \Rightarrow x_w$ ist keine Wendestelle.
$f''''''(x_w)=0 \quad \Rightarrow ???$

usw.

3. Den ganzen Wendepunkt bestimmen

Obacht: Sattelpunkte sind Wendepunkte mit der Steigung 0!

Zum Schluss muss man natürlich die nun bestätigte Wendestelle in die Originalfunktion einsetzen, um den vollständigen Wendepunkt $WP\ (x_w \mid f(x_w))$ zu bestimmen

Aufgaben zu Wendepunkten

1. Berechne die Wendepunkte der angegebenen Funktionen.

$L(x)=\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{6}x^3-x^2 \qquad M(x)=x^4+4x^3-90x^2 \qquad N(x)=\frac{2}{3}x^4-\frac{8}{3}x^3-32x^2$

$O(x)=x^3-15x^2 \qquad P(x)=0{,}5x^4-27x^2 \qquad Q(x)=-\frac{1}{2}x^4-\frac{3}{2}x^3+3x^2$

2. Berechne die Nullstellen, die Extrema und die Wendepunkte (inkl. Sattelpunkte) der angegebenen Funktionen und zeichne auf dieser Basis den Funktionsgraphen.

$R(x)=x^3+3x^2-9x \qquad S(x)=-\frac{3}{2}x^4+6x^2$