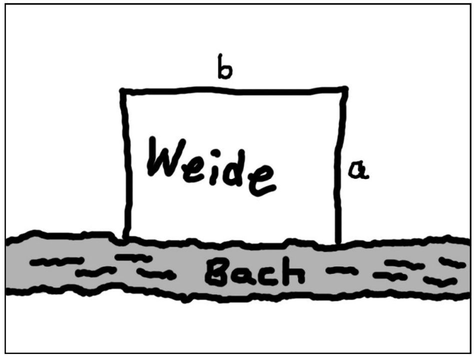
Extremalprobleme

Ein Beispiel

Bauer Bopp will eine rechteckige Weide für seine Schafe umzäunen. Um Zaun zu sparen, will er die Weide an einem Bach anlegen, der die Weide auf einer Seite begrenzt. Bauer Bopp hat 70 Meter aufgewickelten Maschendrahtzaun zur Verfügung. Er möchte die Weide natürlich so groß wie möglich bauen. Wie muss er sie bemaßen?



Die Hauptbedingung

Groß werden soll ja die Fläche. Diese hängt von a und b ab. Die Funktion, die die Größe der Fläche beschreibt, muss so lauten:

$$F(a,b) = a \cdot b$$

Das war jetzt noch nicht soooo schwer. Aber mit Funktionen, die zwei Variablen haben, können wir nichts anfangen. Wir brauchen…

Die Nebenbedingung

Wir müssen ausnutzen, dass Bauer Bopp nicht beliebig viel Zaun zur Verfügung hat: Es sind nur 70m. Diese übersetzen wir in einen mathematischen Zusammenhang, der ausdrückt, dass die drei Seiten zusammen 70m lang sein müssen:

$$a + a + b = 2a + b = 70$$

Was hilft uns das? Nun, wir können nun b mithilfe von a ausdrücken: $b = 70 - 2a$

Das wiederum können wir nun in die Hauptbedingung einsetzen und bekommen so…

Die Zielfunktion: $F(a) = a \cdot (70 - 2a) = 70a - 2a^2$

Dritter Schritt: Berechnen der passenden Extrema

Wir wollen, dass die Fläche maximal wird. Übersetzt in Funktionentheorie heißt das: Wir brauchen einen Hochpunkt! Den berechnen wir wie gewohnt (ich habe hier aus Platzgründen ein paar Schritte weggelassen).

$F'(a) = 70 - 4a$
$0 = 70 - 4a$
$4a = 70$
$a = 17{,}5$

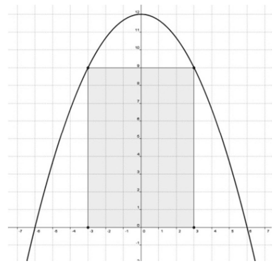
$F''(a) = -4$
$F''(17{,}5) = -4$
Also wir haben an der Stelle 17,5 ein Maximum. a muss 17,5m lang sein.

Also muss die Weide folgende Maße haben:
$a = 17{,}5\text{m}$
$b = 70\text{m} - 2a = 35\text{m}$
Jippi!!!

Aufgaben

Bitte beachten: Hier gibt es kein allgemeines Wie-geht-das-denn mehr, sondern man muss bei jeder Aufgabe selbstständig überlegen, wie das Problem zu erfassen ist. Das ist teilweise recht schwierig. Aufzugeben ist jedoch keine Option, dann kann man die Mathematik der Qualifikationsphase und der Abiturprüfung von vornherein vergessen.

1. Eine Dosenfirma soll im Auftrag der Firma Leckerli zylinderförmige Dosen mit einem Volumen von einem halben Liter herstellen. Die Dosenfirma will natürlich möglichst wenig Material verbrauchen. Welche Maße sollte die Dose haben, damit der Materialverbrauch am geringsten ist? Vergleiche dieses Ergebnis mit den im Supermarkt angebotenen Produkten.



2. Der Querschnitt eines Tunnels kann durch den Graphen der Funktion $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 12$ sehr gut angenähert werden. Nun sollen den Tunnel Schwertransporter mit großen Containern durchqueren, die extra für diesen Tunnel gebaut werden. Die Länge der Container ist hier nicht wichtig, aber wie hoch und wie breit sollten sie sein, damit man in ihnen möglichst viel unterbringen kann? Anmerkung: Das Rechteck in der Zeichnung dient nur der Veranschaulichung und enthält keinen Hinweis auf das Ergebnis.

Die Hammeraufgabe

3. Fischer Fritz fährt jeden Tag aufs Meer zum Fischen. Die Fische, die er fängt, kauft ihm immer ein Großhändler ausnahmslos ab. Normalerweise kostet ein Fisch 5€. Bei 100 Fischen zahlt der Großhändler jedoch nur noch 4,90; bei 200 4,80 usw. Pro verkauftem Fisch reduziert sich der Preis pro Fisch also um einen Zehntel Cent. Außerdem muss nach 10.000 Fischen das 40-Euro-Netz erneuert werden, diese Kosten werden von Fritz auf den einzelnen Fisch umgelegt. Pro Tag hat Fritz Festkosten von 450€ (Treibstoff, Wartung usw.). Nun die Fragen:

a. Welche Menge an verkauftem Fisch pro Tag verspricht den höchsten Gewinn für Fritz?
b. Wie groß ist die Gewinnzone? D.h.: Wie viele Fische muss Fritz mindestens fangen und verkaufen, wie viele höchstens, um Gewinn zu machen?

Aufgaben im Buch

Seite	Aufgabe	Zu erledigen bis
165	1	
166	4	
169	7	
171	10	

Seite	Aufgabe	Zu erledigen bis
172	12	
177	20	
178	23	
179	27	