Rekonstruktionsaufgaben

Wie ihr ja schon wisst, lautet die Grundform ganzrationaler Funktionen so:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Bei wenigen Gliedern kann man die Koeffizienten auch so schreiben:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Bei Rekonstruktions- oder Steckbriefaufgaben ist es so, dass man z.B. die Information bekommt, dass eine ganzrationale Funktion dritten Grades gesucht ist und man anhand bestimmter Informationen die Koeffizienten a, b, c und d herausfinden soll. Die Informationen können z.B. so lauten: „Die Funktion hat einen Tiefpunkt bei $(1\,|\,-5)$“.

Aus solchen Informationen die Funktionsgleichung zu rekonstruieren ist nicht ganz einfach. Ein großes Problem ist, dass man oft nicht weiß, wie man die Informationen aus Texten in mathematische Gleichungen umsetzen soll. Die folgende Übersicht soll dabei helfen.

Beispiele zur „Übersetzung“ von Informationen in mathematische Gleichungen

Information	resultierende Gleichungen
f hat eine Nullstelle bei $x_N = 5$.	$f(5) = 0$
Die Funktion g hat bei -6 ein Extremum.	$g'(-6) = 0$
Die Funktion h hat bei -9 einen Wendepunkt.	$h''(-9) = 0$
i hat einen Hochpunkt bei $(3\,|\,9)$.	$i(3) = 9$ $i'(3) = 0$
j hat einen Wendepunkt bei $(-1\,|\,4)$. Die Steigung der entsprechenden Wendetangente beträgt $1{,}5$.	$j(-1) = 4$ $j'(-1) = 1{,}5$ $j''(-1) = 0$
k hat einen Sattelpunkt an der Stelle 5.	$k'(5) = 0$ $k''(5) = 0$
Der Graph einer Funktion vierten Grades ist achsensymmetrisch zur y-Achse. $l(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$	$b = 0$ $d = 0$ $\Rightarrow l(x) = ax^4 + cx^2 + e$
Der Graph einer Funktion dritten Grades ist punktsymmetrisch zum Ursprung. $m(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$	$b = 0$ $d = 0$ $\Rightarrow m(x) = ax^3 + cx$
Der Steigungswinkel von n an der Stelle 3 beträgt $30°$.	$n'(3) = \tan(30°) = 0{,}57735$

Beispielaufgabe

Eine zum Ursprung punktsymmetrische Funktion dritten Grades hat einen Tiefpunkt bei $(1\,|\,-4)$.

Lösung

Grundform und Ableitungen:

$$s(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$
$$s'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$
$$s''(x) = 6ax + 2b$$

Wegen der Punktsymmetrie fallen b und d weg:

$$s(x) = ax^3 + cx$$
$$s'(x) = 3ax^2 + c$$
$$s''(x) = 6ax$$

Aus den Angaben zum Tiefpunkt folgt:

$$s(1) = -4$$
$$s'(1) = 0$$

Wenn man die 1 in die Rohformen einsetzt, ergibt sich:

$$s(1) = a \cdot 1^3 + c \cdot 1 = a + c$$
$$s'(1) = 3a \cdot 1^2 + c = 3a + c$$

Die Resultate von rechts und links setzt man gleich und kann z.B. nach einer Variablen auflösen:

$$\begin{aligned} \text{I.}\quad -4 &= a + c \\ \text{II.}\quad 0 &= 3a + c \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \text{I.}\quad -4 - a &= c \\ \text{II.}\quad -3a &= c \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} -4 - a &= -3a \\ -4 &= -2a \\ 2 &= a \end{aligned}$$

Mit dem Resultat für a kann man auch c berechnen (z.B. mit II. aus dem mittleren Block):
$c = -3a = -3 \cdot 2 = -6$

Da man ja jetzt a und c kennt, kann man die komplette Funktionsgleichung aufstellen: $\boxed{s(x) = 2x^3 - 6x}$

Weitere Beispiele und Erklärungen gibt es an der Tafel und im Buch ab S. 180.

Aufgaben

S. 181, A. 1
S. 183, A. 2
S. 184, A. 9
S. 187, A. 14

Weitere Übungen (freiwillig) auf den Seiten 181–188.

Hier sehen Sie ein exzellentes Bild des Niedernhausener Hauptbahnhofs.