Exponentialfunktionen: Wachstum und Zerfall

Die bisher bekannten ganzrationalen Funktionen können schon eine Menge realer Prozesse ganz gut beschreiben. Allerdings gibt es auch viele Sachzusammenhänge, bei denen ganzrationale Funktionen versagen. Dann müssen andere Funktionstypen her.
Zur Modellierung bestimmter Wachstums- und Zerfallsprozesse eignen sich Exponentialfunktionen sehr gut.

Beispiel
Eine bestimmte Algenart beginnt eine Invasion auf einen See. Die bedeckte Fläche verdoppelt sich jeden Tag. Man entdeckt die Algen, als sie bereits drei Quadratmeter bedecken. Daraus ergibt sich dieser Ablauf:

Tag	0	1	2	3	4	5	6	7	usw.
Bedeckte Fläche in m^2	3	6	12	24	48	96	192	384	

Dazu passend ist folgende Funktionsgleichung: $a(t) = 3 \cdot 2^t$

Die 3 ist der so genannte **Anfangswert**, die 2 der **Wachstumsfaktor**.

Formales zu Exponentialfunktionen

Eine vorläufige Grundform von **Exponentialfunktionen** sieht so aus:

$$f(x) = a \cdot b^{cx-d} + e \qquad \text{mit} \quad a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$$

Die **Parameter** a, b, c, d und e haben, abgesehen von der anwendungsbezogenen Bedeutung, Auswirkungen auf den Graphen:

a: a streckt und staucht den Graphen – wie bei ganzrationalen Funktionen.
b: Ist $b = 1$, ist der Graph eine horizontale Gerade. Ansonsten ist der Graph eine Kurve.
c: c streckt und staucht den Graphen parallel zur x-Achse.
d: Ist d nicht Null, wird der Graph um d nach rechts verschoben.
e: Der Graph wird um e nach oben verschoben.

Für d und e gilt natürlich, dass der Graph in die entgegengesetzte Richtung verschoben wird, sollte der Parameter negativ sein.

Aufgaben

1. Zunächst variieren wir das Eingangsbeispiel. Auf anderen Seen gibt es mutierte Algen mit anderen Wachstumsfaktoren (siehe unten). Sie werden wieder bei anfangs drei Quadratmetern bedeckter Fläche entdeckt. Stelle Funktionsgleichungen für die folgenden täglichen Wachstumsraten auf und berechne die Vervielfachungen in den ersten fünf Tagen:
3 10 100 1,5

2. Angenommen, am Anfang existieren 10 Quadratmeter Algen, die sich pro Tag vervierfachen. Rechne *zunächst* aus, wie viele Quadratmeter man am ersten, zweiten, ..., fünften Tag hat. Versuche *dann* eine passende Funktionsgleichung aufzustellen.

3. Genauso, wie etwas wachsen kann, kann etwas zerfallen. Bei radioaktiven chemischen Elementen gibt es die Halbwertszeit, die angibt, wann nur noch die Hälfte einer ursprünglichen Menge vorhanden ist. Der Wachstumsfaktor wird nun zu einem Zerfallsfaktor und beträgt 0,5.
Die Halbwertszeit des chemischen Elements Iod beträgt gut acht Tage. Nehmen wir an, es sind genau acht. Du hast aus irgendeinem Grund 16kg Iod erbeutet und siehst ihm nun beim Zerstrahlen zu. Stelle eine Funktionsgleichung auf und berechne die vorhandenen Mengen nach 8, 16, 32 und 64 Tagen.

4. Die Halbwertszeit von Plutonium beträgt 24.110 Jahre. Angenommen, ein wahnsinniger ehemaliger Froschdompteur hat 200kg (eine völlig utopische Menge) erbeutet und möchte nun wissen, wie viel er nach 100, 1000, 10.000 und 1.000.000 Jahren noch hat. Stelle eine Funktionsgleichung auf, bei der man für die Variable einfach die seit der Erbeutung des Plutoniums vergangenen Jahre einsetzen kann und berechne die vorhandene Menge Plutonium zu den o.g. Zeitpunkten.

5. Zwei Kaninchen haben besondere Freude am Zusammensein, so dass sie einen beachtlichen Nachwuchs hervorbringen. Nach 8 Tagen veranderthalbfacht sich immer ihre Gesamtanzahl. Stelle wieder eine passende Gleichung auf und berechne, wie viele Karnickel wir nach einem halben Jahr (183 Tage) begrüßen, wenn alle überleben.

6. 50 Körnchen Feenstaub verdreifachen sich aufgrund eines entsprechenden Zaubers täglich. Nun wird es anspruchsvoll: Ich möchte vier unterschiedliche Funktionsgleichungen haben: Jeweils eine, in der ich als Variable Stunden, Wochen, Monate und Minuten „eingeben“ kann. Berechne mit jeder dieser Gleichungen: Wie viele Körnchen habe ich nach 17 Stunden und 23 Minuten?

7. 1993 hat irgendein Atomkraftwerk 600g Plutonium produziert. Nun möchte ich eine Funktionsgleichung, in die ich direkt die Jahreszahl eingeben kann und sehe, wie viel Plutonium dann und dann noch da ist. Gib genaue Werte für die Jahre 50.000, 76.038, 802.701 und 2.000.001 an.

8. Dein Mathelehrer befiehlt dir, den Graph der Funktion $v(x) = 4^x$ um 2 nach links und 4 nach oben zu verschieben und die passende Funktionsgleichung aufzustellen. Du bist natürlich artig und tust das. Zeichne den veränderten Graphen.

9. Nun wird es tollkühn: Man verlangt von dir, dass der Graph von $v(x)$ mit dem Faktor 0,4 gestaucht wird. Nochmal das Ganze.

10. Beschreibe in Worten, welche Veränderungen dazu geführt haben, dass aus $w(x) = 5^x$ die Funktion $ü(x) = 17 \cdot 5^{(x-11)} + 2$ wurde.

11. Beschreibe nun in Worten, wie aus $u(x) = 0{,}2 \cdot 5^{(x+45)} - 8$ die Funktion $t(x) = 5^x$ wurde.

12. Und nun beschreibe die Veränderungen von $q(x) = 50 \cdot 10^{(x-8)} + 20$ zu $p(x) = 5 \cdot 10^{(x+4)} - 9$.

Logarithmus & Exponentialgleichungen

Bis jetzt können wir mit Exponentialfunktionen ausrechnen, wie viel Algen, Feenstaub o.ä. wir zu einem bestimmten Zeitpunkt übrig haben. Man möchte jedoch auch wissen, wie lange es dauert, bis man eine bestimmte Menge Algen, Feenstaub etc. hat. Vorher war also die Zeit gegeben und die Menge gesucht, nun ist die Menge gegeben und der Zeitpunkt gesucht. Für solche Probleme braucht man den Logarithmus.

Grundsätzliches

Der Ausdruck $\boxed{\log_b a}$ wird folgendermaßen gelesen: Logarithmus von a zur Basis b.

Definition des Logarithmus

Der Logarithmus ist folgendermaßen definiert: $\boxed{x = \log_b a \Leftrightarrow b^x = a}$

Der Doppelpfeil heißt, das die Aussagen rechts und links davon gleichwertig sind.

Der Logarithmus von a zur Basis b ist also die Zahl, mit der man b potenzieren muss, damit a herauskommt.

Es gilt demnach auch: $\boxed{b^{\log_b a} = a}$

Spezielle Logarithmen:

- lg ist der Logarithmus zur Basis 10, bedeutet also dasselbe wie $\log_{10}$. Leider auf vielen Taschenrechnern mit log bezeichnet. Also nicht verwirren lassen!
- ln ist der Logarithmus zur Basis $e = 2{,}718281828459\ldots$ Diese „Eulersche Zahl" lernen wir bald kennen.

Eingabe in den Taschenrechner

Möchte man $\boxed{\log_b a}$ ausrechnen, hat aber einen uralten Taschenrechner, gibt man folgendes in den TR ein: $\boxed{\lg a : \lg b}$. Hört sich komisch an, ist aber so.

Die Logarithmengesetze

Wie bei Potenzen gibt es auch bei Logarithmen Rechengesetze, die ihr ab sofort präsent haben müsst.

$$\log_b(u \cdot v) = \log_b u + \log_b v \qquad \log_b\left(\frac{u}{v}\right) = \log_b u - \log_b v \qquad \log_b(u^r) = r \cdot \log_b u$$

Dabei gilt: $b \in \mathbb{R}^+ \setminus 1 \quad u, v \in \mathbb{R}^+ \quad r \in \mathbb{R}$

Tipps zur Lösung von Exponentialgleichungen

Vorführung an einem Beispiel

Rechnung	Kommentar
$8^t = 5 \cdot 3^{t-2}$	Zuerst schreibt man natürlich die Gleichung hin.
$8^t = 5 \cdot 3^t \cdot 3^{-2}$	Dann trennt man alle Bestandteile, in denen die Variable vorkommt, von denen, die sich als Zahl schreiben lassen.
$\frac{8^t}{3^t} = 5 \cdot \frac{1}{3^2}$	Nun bringt man alles mit der Variable auf eine Seite, alles andere auf die andere Seite
$\left(\frac{8}{3}\right)^t = \frac{5}{9}$	Jetzt schreibt man den Term mit der Variable so um, dass die Variable im Exponent steht.
$t = \log_{\frac{8}{3}} \frac{5}{9}$	Dann kann man den passenden Logarithmus bilden.
$t = -0{,}59927521849218$	Diesen lässt man sich mit dem Taschenrechner ausrechnen.

Hier ist Platz für ein Gedicht

Aufgaben

1. Mit den Logarithmengesetzen kann man Terme vereinfachen. Erledige das mit den hier aufgeführten Termen – ohne den Taschenrechner zu benutzen!

a) $\lg 60 - \lg 2 - \lg 3$ b) $\lg 150 + \lg 2 - \lg 3$ c) $\lg\frac{5}{3} + \lg\frac{4}{5} + \lg\frac{3}{4}$ d) $\log_2 48 - \log_2 3 - \log_2 2$

2. Löse die Gleichungen (also bestimme die Unbekannte) – möglichst ohne Taschenrechner!

a) $\log_2 x + \log_2 3 = \log_2 9$	b) $\lg(3z+1) = 1$	c) $\log_2 y - \log_2 2356 = \lg 1$	d) $\log_5(d+2) + 1 = \log_5 12$
e) $\lg 5 + \lg z = 1$	f) $\log_2 g + 2\log_2 6 = \log_2 72$	g) $r = \log_5 25$	h) $i = \log_{25} 10000 - \log_{25} 2000$

3. Löse die Gleichungen. Es kommen teilweise „unfreundliche" Ergebnisse heraus, runde diese auf vier Stellen hinter dem Komma.

a) $4^c = 16777216$	b) $5 \cdot 4^{2w} + 1 = 5242881$	c) $3^{2x} = 4 \cdot 5^{x+3}$	d) $22 \cdot 3^{v-3} = 9 \cdot 5^{3+v}$
e) $7^{k-4} = 823543$	f) $5^m = 2 \cdot 7^{m+1}$	g) $5 \cdot 6^{2x} = 6 \cdot 5^{2x}$	h) $18 \cdot 3^{7x-1} = 2 \cdot 5^{2x-1}$

4. Berechne die Nullstelle und den y-Achsenabschnitt der angegebenen Funktionen – soweit möglich.

a) $Ö(s) = 3^s$	b) $Ä(s) = 3^s - 3$	c) $Ü(s) = 3^s + 5$	d) $Y(s) = 4 \cdot 3^s - 6$
e) $ß(s) = -2 \cdot 4^s + 3$	f) $@(s) = -4 \cdot 2^s - 4$	g) $§(s) = -0{,}5 \cdot 2^s + 10$	h) $\#(s) = 10^s \cdot 0{,}1^s \cdot 2^s - 1$

5. Hier sind jeweils zwei Exponentialfunktionen angegeben. Berechne den Schnittpunkt der beiden Graphen.

a) $a(c) = 80 \cdot 2^c$, $k(c) = 5 \cdot 4^c$ b) $b(c) = \frac{1}{9^c}^{\,c}$, $L(c) = 81 \cdot 3^{-c}$ c) $Q(c) = 5 \cdot 2^c$, $m(c) = 6 \cdot 0{,}3^c$ d) $d(c) = 3 \cdot 2^{-c}$, $N(c) = 6 \cdot \left(\frac{8}{5}\right)^c$

6. Die Funktionen mit den unten angegebenen Gleichungen schneiden sich irgendwo. Gib den Schnittpunkt genau an. Leider ist hier die Lösung nur durch Ausprobieren zu finden. Wieso?

$$Ö(d) = \frac{1}{4} 2^d - 1 \qquad Ü(d) = \frac{3^d}{9} - 2$$

7. Die elenden Algen wieder. Sie bedecken eine Fläche von drei Quadratmetern, als sie gefunden werden und verdoppeln sich alle drei Tage. Nun will irgendein Depp präzise wissen, wann sie 50 Quadratmeter bedecken. Berechne.

8. Die Laune irgendeines Mathematiklehrers beginnt bei 200 Launepunkten und halbiert sich alle 10 Minuten, nachdem ihn irgendein Schüler wegen einer Algenaufgabe als Depp bezeichnet hat. Wann ist seine Laune bei 30 Launepunkten (ständiges Grummeln) angelangt?

9. Atomkraft ist ja was Tolles. Man möchte ein Kilogramm Plutonium loswerden. Die Halbwertszeit von Plutonium beträgt 24.110 Jahre. Wann kann man damit rechnen, nur noch ein Gramm loswerden zu müssen?

10. Zwei Populationen intelligenter Algen haben einen Wettbewerb gestartet, welche ihren eigenen See zuerst vollkommen zuwächst. Population Hummelheim startet mit 20 Quadratmetern und verdreifacht sich alle vier Tage. Population Bienendorf startet mit 200 Quadratmetern, aber verdreifacht sich nur alle 5 Tage. Am Ende gewinnt Hummelheim. Ermittle, wie groß jeder der Seen mindestens ist.

Ergebnisse zu manchen Aufgaben – zur Überprüfung

2. a) $x=3$ b) $z=3$ c) $y=2356$ d) $d=0{,}4$ e) $z=2$ f) $g=2$ g) $r=2$ h) $i=0{,}5$

3. a) 12 b) 5 c) 10,572897 d) –14,154209 e) 11 f) –7,84331378 g) 0,5 h) –0, 6056367

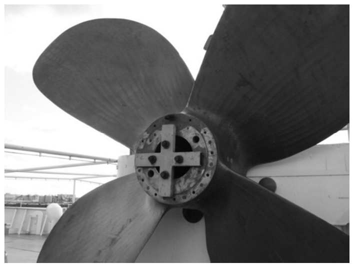
4. a) $s_N = -$, $S_y(0|1)$ b) $s_N = 1$, $S_y(0|-2)$ c) $s_N = -$, $S_y(0|6)$ d) $x_N = 0{,}36907$, $S_y(0|-2)$
e) $s_N = 0{,}29248$, $S_y(0|1)$ f) $s_N = -$, $S_y(0|-8)$ g) $s_N = 4{,}321928$, $S_y(0|9{,}5)$ h) $s_N = 0$, $S_y(0|0)$

5. a) (4 | 1280) b) (– 4 | 6561) c) (0,0961044 | 5,344416576) d) (–0,595922 | 4,53433147)

7. $3\log_2\left(\frac{50}{3}\right) = 12{,}176681$

8. $10\log_{0,5}\left(\frac{3}{20}\right) = 27{,}369655941662061664165804855416$

9. $24110\log_{0,5}\left(\frac{1}{1000}\right) = 240275{,}05910320291862146020433497$



Dieses Bild einer Schiffschraube erfüllt, wie die meisten Bilder in Mathebüchern auch, keinerlei Zweck.

Hier kannst du ein eigenes zweckloses Bild hinzeichnen.

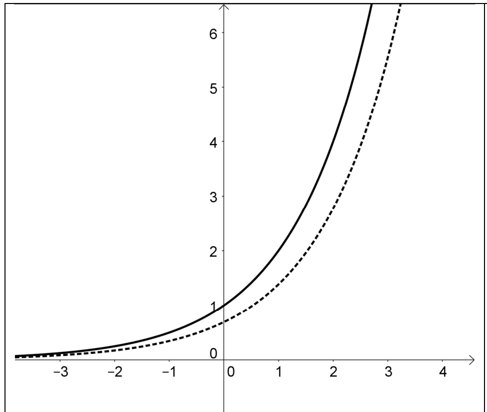
Exponentialfunktionen und die Eulersche Zahl e

→ 12.1-Buch, S. 92–148

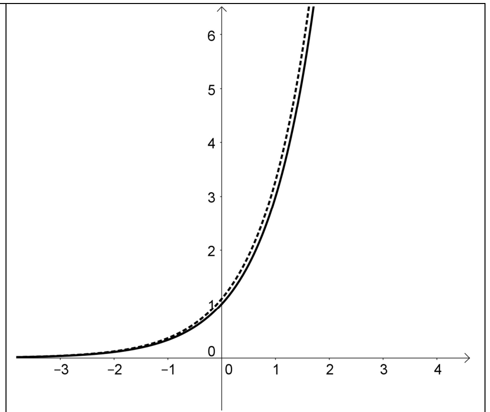
Der Nutzen der Eulerschen Zahl

Problem

Exponentialfunktionen wie ...	$f(x)=2^x$	$g(x)=3^x$
müssen schwierig mit dem Differentialquotienten abgeleitet werden.	$f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2^{x+h}-2^x}{h}$	$g'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{3^{x+h}-3^x}{h}$
Die Resultate sehen nicht sehr erbaulich aus:	$f'(x)=0{,}6931471806\cdot 2^x$	$g'(x)=1{,}098612289\cdot 3^x$



$f(x)=2^x$ mit ihrer Ableitung
$f'(x)=0{,}6931471806\cdot 2^x$ (gestrichelt)



$g(x)=3^x$ mit ihrer Ableitung
$g'(x)=1{,}098612289\cdot 3^x$ (gestrichelt)

Die wundervolle Lösung für das Problem: Die Eulersche Zahl und der natürliche Logarithmus

Es existiert eine Zahl e, für die gilt:

$$f(x)=e^x$$
$$\Rightarrow f'(x)=e^x$$
$$\Rightarrow f''(x)=e^x$$

Sie heißt **Eulersche Zahl**, ihr Wert ist $e = 2{,}718281828459\ldots$

Der **natürliche Logarithmus** ist so definiert: $\ln x=\log_e x$

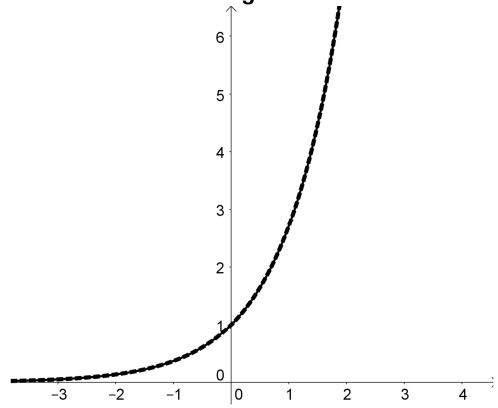
Nun kann man gemäß der Potenz-Gesetze jede beliebige Exponentialfunktion umschreiben:

Beispiele:
$f(x)=2^x=e^{x\cdot\ln 2}$
$g(x)=3^x=e^{x\cdot\ln 3}$

Ableitung beliebiger Exponentialfunktionen

Aufgrund des auf der letzten Seite unten beschriebenen Zusammenhangs kann man jede beliebige Exponentialfunktion in eine e-Funktion umwandeln und anschließend ableiten.

Graph der e-Funktion mit ihrer identischen Ableitung



Beispiel

$k(x)=9^x=e^{\ln 9\cdot x}$
$k'(x)=\ln 9\cdot e^{\ln 9\cdot x}=\ln 9\cdot 9^x$

Man kann das Ganze dann natürlich kürzer schreiben:

Beispiele

$L(x)=11^x$	$m(x)=7{,}2^x$
$L'(x)=\ln 11\cdot 11^x$	$m'(x)=\ln 7{,}2\cdot 7{,}2^x$

Ableitung komplexerer e-Funktionen

Steht im Exponent einer e-Funktion etwas anderes als nur x, so wird die Ableitung gemäß dieser Regel gebildet:

$$f(x)=e^{v(x)} \qquad \Rightarrow \qquad f'(x)=v'(x)\cdot e^{v(x)}$$

Beispiele

$n(x)=e^{2x+5}$	$o(x)=e^{x^2}$	$p(x)=e^{11x-12x^2}$	$q(x)=e^{e^x}$
$n'(x)=2e^{2x+5}$	$o'(x)=2xe^{x^2}$	$p'(x)=(11-24x)\cdot e^{11x-12x^2}$	$q'(x)=e^x e^{e^x}$

Diese Regel ist ein Spezialfall der so genannten **Kettenregel**, die wir bald kennenlernen werden.

Aufgabe zur Ableitung von Exponentialfunktionen

Bilde jeweils die erste Ableitung. Beachte die Potenzgesetze!

$a(t)=3^t$	$d(t)=3\cdot 8^t$	$g(t)=0{,}7e^{6+4t}$
$b(t)=2e^t$	$e(t)=2\cdot 0{,}4^{5t}$	$h(t)=e^{4x^3-6x^2+1}$
$c(t)=11e^{4t}$	$f(t)=e^{2t-9}$	$i(t)=8e^{8e^t+x^4}$

Vorsicht! Um die zweite Ableitung zu bestimmen, benötigen wir die Produktregel, die noch eingeführt wird!!!

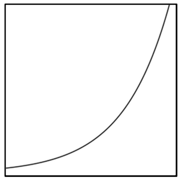
Anwendungsaufgaben (sehr seriös) zu Exponentialfunktionen

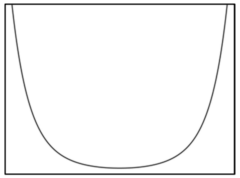
11. Wir betrachten die Funktion $\mathrm{elf}(x) = \frac{1}{10} \cdot e^{2-x}$ auf dem Intervall $[-3;4]$.

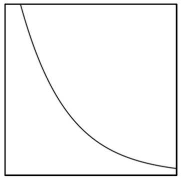
a. Berechne ohne Zuhilfenahme des Taschenrechners den Funktionswert an der Stelle 2.
b. Skizziere den Graphen der Funktion auf dem genannten Intervall mithilfe einer geeigneten Wertetabelle.
c. Gib das Grenzverhalten gegen $\pm$Unendlich an.
d. Berechne, ab welcher Stelle die Funktionswerte die magische Grenze von $0{,}2$ unterschreiten.
e. Bestimme die ersten beiden Ableitungen der Funktion und zeichne sie auf Basis einer Wertetabelle in das gleiche Koordinatensystem wie die Originalfunktion. Erläutere die hier vorliegende Hexerei.
f. Bestimme zuerst auf Basis einer visuellen Betrachtung des Ableitungsgraphen die Steigung der Originalfunktion an der Stelle $x_q = -1$. Bestimme dann exakten Wert unter Zuhilfenahme des Taschenrechners und beschreibe deine Beobachtung.
g. Denke dir eine mögliche Anwendung für diese Funktion aus.

12. Ordne die drei Funktionen ohne Zuhilfenahme des Taschenrechners ihren Funktionsgraphen zu. Begründe deine Wahl.

$\mathrm{zwölf}_1(x) = 0{,}3 \cdot 2^x$ $\mathrm{zwölf}_2(x) = 3 \cdot 0{,}5^x$ $\mathrm{zwölf}_3(x) = 3^{0{,}1x^2}$


Alpha


Beta


Gamma

13. Vor acht Jahren hat Herr B. Sondersklug 10.000 Euro zu einem Zinssatz von $1\,\%$ angelegt. Der Vertrag ist so definiert, dass die Bank keine Möglichkeit hat, ihn zu ändern, bevor Herr B. Sondersklug den Weg alles Irdischen geht. Da das Kreditinstitut vom Einsatz von Profikillern absieht, zahlt sie weiter fleißig die Zinsen.

a. Stelle zunächst eine passende Funktionsgleichung auf.
b. Ermittle, ob sich das Geld bereits verdoppelt hat. Falls nicht, berechne, wann es soweit sein wird.
c. Nehmen wir an, Herr B. Sondersklug habe noch 40 Jahre zu leben. Berechne, wie hoch das Erbe sein wird, das er dann seinen Lieben hinterlässt.
d. Ermittle, in welchem Jahr nach Beginn des Sparvertrages das Wachstum des Vermögens 120 Euro/Jahr beträgt.
e. Berechne den durchschnittlichen jährlichen Vermögenszuwachs in den ersten zwanzig Jahren Laufzeit.

14. In der Gegend von Honighausen wird zweijährlich im Juni der Bestand der Honigbienen untersucht. Folgende Messwerte ergaben sich von 2000 bis 2010:

Jahr	2000	2002	2004	2006	2008	2010
#Bienen	400.000	360.000	324.000	291.600	262.440	236.196

a. Überprüfe, ob es sich um einen linearen oder einen exponentiellen Zerfall handelt und stelle eine Funktionsgleichung auf, die den Zerfall einigermaßen gut modelliert.
b. Berechne, wie viele Bienen im Jahr 2007 vorhanden waren.
c. Berechne die durchschnittliche jährliche Abnahme des Bestandes im gemessenen Zeitraum.
d. Berechne, in welchem Jahr die kritische Marke von 100.000 Bienen unterschritten wird, wenn das Sterben so weitergeht.
e. Bestimme das Jahr, an dem die Abnahme pro Jahr 15.000 Bienen betrug.
f. Mathematische Modelle sind immer unzureichend. Erläutere, ab wann dieses Modell spätestens versagt und beurteile seine generelle Qualität, was die Vorhersage der künftigen Abnahme betrifft.
g. Tu etwas gegen das Bienensterben!

Resultate (außer Graphen, Beschreibungen und Erläuterungen)

11.

a) $0{,}1$	c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\mathrm{elf}(x)\right) = \infty \quad \lim\limits_{x\to\infty}\left(\mathrm{elf}(x)\right) = 0^+$	d) $1{,}3068528$
e) $\mathrm{elf}'(x) = -\frac{1}{10} \cdot e^{2-x} \quad \mathrm{elf}''(x) = \frac{1}{10} \cdot e^{2-x}$	f) Sieht aus wie 2, ist aber $-2{,}008553692$	

12.

Alpha: Z1 Beta: Z3 Gamma: Z2

13.

a) $k(t) = 10.000 \cdot 1{,}01^t$	b) Erst $69{,}66$ Jahre nach Start.	c) $16.122{,}26$ Euro
d) Nach $18{,}8236$ Jahren. Im $19.$ also.	e) $110{,}09502$ Euro/Jahr	

14.

a) $b(z) = 400.000 \cdot 0{,}9^{0{,}5z}$	b) $276636.$	c) $16380{,}4$
d) Nach $26{,}3153$ Jahren	e) Nach $6{,}4521$ J., also $2006.$	