Trigonometrische Funktionen

Was mag das sein?

Wir haben auch hier wieder eine Grundform, in die sich alle trigonometrischen Funktionen pressen lassen, mit denen wir zu tun haben werden:

$$f(x) = a \cdot \sin\big(b \cdot (x - c)\big) + e \qquad a, b, c, d, e \in \mathbb{R} \qquad D = \mathbb{R}$$

Sollte jemand protestieren und nach dem Kosinus verlangen, sei dieser jemand an die Gleichheit $\cos(\alpha) = \sin(\alpha + 90°)$ erinnert.

➔ Siehe auch ab Seite 228 im Buch!

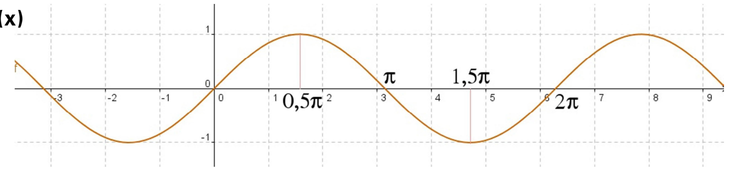
Umrechnung Winkel/Bogenmaß

Sei α ein Winkel und x das zugehörige Bogenmaß. Dann gelten folgende Beziehungen:

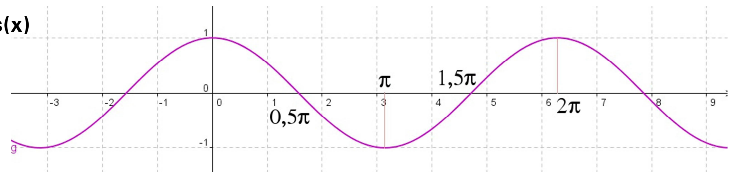
$$x = \frac{\alpha}{180°}\pi \qquad \alpha = \frac{180° \cdot x}{\pi}$$

Die Grundfunktionen

s(x) = sin(x)



c(x) = cos(x)



Wichtige Begriffe

Amplitude

Halber vertikaler Abstand von Hoch- und Tiefpunkten.
Bei den Grundfunktionen: Abstand Hoch-/Tiefpunkt zur x-Achse, die Amplitude ist also genau 1.

Periode

Horizontale Distanz, nach der sich der Funktionsverlauf wiederholt.

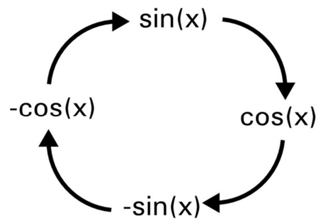
Wichtige Gesetze

Periodizität :	$\sin(x) = \sin(x + 2k\pi)$	$\cos(x) = \cos(x + 2k\pi)$	$k \in \mathbb{Z}$
Symmetrie :	$\sin(x) = -\sin(-x)$	$\cos(x) = \cos(-x)$	
	$\sin(x) = \sin(\pi - x)$	$\cos(x) = \cos(2\pi - x)$	

➔ Man beachte unbedingt weitere wichtige Gesetze ab Seite 26 im Tafelwerk.

Funktionsuntersuchung/Kurvendiskussion

- Der **Definitionsbereich** umfasst normalerweise alle reellen Zahlen;
- Der **Schnittpunkt mit der y-Achse** wird wie üblich mit f(0) berechnet.

Ableitungen	Bei den trigonometrischen Funktionen haben wir es mit einem Ableitungskreislauf zu tun, der rechts dargestellt ist. Es gilt also z.B.: $f(x) = \sin(x)$ $f'(x) = \cos(x)$ $f''(x) = -\sin(x)$ usw. Für verschachtelte Funktionen wie $f(x) = \sin(3x + 2)$ gilt die *Kettenregel*, die wir bald kennenlernen werden.	
Symmetrie	Wie aus den *wichtigen Gesetzen* von oben zu schließen ist ▪ **Sinusfunktion** in ihrer Grundform **punktsymmetrisch zum Ursprung** ▪ **Kosinusfunktion** in ihrer Grundform **achsensymmetrisch zur y-Achse** Wird der Graph verschoben o.ä., können diese Symmetrien natürlich verschwinden.	
Nullstellen	Die Nullstellen von **sin(x)** sind in der ersten Periode 0; π; und 2π. Bei Streckungen und Verschiebungen verändern sich diese Nullstellen entsprechend.	Die Nullstellen von **cos(x)** sind in der ersten Periode $0{,}5\pi$, $1{,}5\pi$. Bei Streckungen und Verschiebungen verändern sich diese Nullstellen entsprechend.
Extrema	**sin(x)** hat in der ersten Periode... ▪ einen Hochpunkt bei $(0{,}5\pi \mid 1)$ ▪ einen Tiefpunkt bei $(1{,}5\pi \mid -1)$ Veränderungen passieren bei Streckungen und Verschiebungen.	**cos(x)** hat in der ersten Periode... ▪ Hochpunkte bei $(0 \mid 1)$ und $(2\pi \mid 1)$ ▪ einen Tiefpunkt bei $(\pi \mid -1)$. Veränderungen passieren bei Streckungen und Verschiebungen.
Wendepunkte	Die Grundfunktionen haben Wendepunkte an den Nullstellen. Bei Streckungen und Verschiebungen verändern sich die Wendepunkte entsprechend.	
Verhalten $\to \pm\infty$	Aufgrund der Periodizität existieren normalerweise keine Grenzwerte gegen Unendlich.	

Aufgaben

1. Rechne jeweils in Bogenmaß/Winkel um.

a) $60°$ b) $\frac{1}{4}\pi$ c) $\frac{2}{3}\pi$ d) $150°$

e) $\frac{7\pi}{6}$ f) $300°$ g) $\frac{7\pi}{4}$ h) $240°$

2. Zeichne die folgenden Bogenmaße in den Einheitskreis ein. Bestimme jeweils Sinus und Kosinus durch Ablesen.

a) $\frac{1}{3}\pi$ b) π c) $\frac{11}{12}\pi$ d) $\frac{3}{2}\pi$

3. Gib jeweils bis zu vier Bogenmaße an, für die die jeweilige Gleichung gilt. Falls es weniger als vier gibt, begründe dies. Von einem angegebenen Sinus/Kosinus-Wert kommt man mithilfe der arcsin/arccos/$\sin^{-1}$/$\cos^{-1}$-Taste auf dem TR zurück zum Bogenmaß.

a) $|\sin(x_1)| = 0{,}5$ b) $|\cos(x_2)| = 0{,}5$ c) $|\sin(x_3)| = 1$ d) $|\cos(x_4)| = 0$

4. Hier werden die Begriffe Amplitude und Periode geübt.

a) Stelle die Funktionsgleichung einer Sinusfunktion auf, die die vierfache Amplitude wie die Grundfunktion hat.
b) Stelle die Funktionsgleichung einer Kosinusfunktion auf, die die vierfache Amplitude wie die Grundfunktion hat und an der x-Achse gespiegelt ist.
c) Stelle die Gleichung einer Sinusfunktion auf, die im Verhältnis zur Grundfunktion die dreifache Periodenlänge hat.
d) Stelle die Gleichung einer Kosinusfunktion auf, die nur die halbe Periodenlänge wie die Grundfunktion hat.
e) Bestimme die Gleichung einer Sinusfunktion, die die neunfache Periodenlänge und die zehnfache Amplitude wie die Grundfunktion hat.

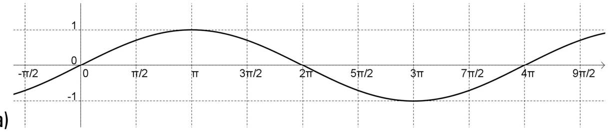
5. Begründe die folgenden Zusammenhänge:

a) Die Spiegelung des Graphen der Sinus- oder Kosinus-Grundfunktion an der x-Achse ist das gleiche wie die Verschiebung um π in x-Richtung.
b) $-\sin(x) = \sin(x+\pi) = \sin(x-\pi)$
c) Die Spiegelung des Graphen der Sinus-Grundfunktion an der x-Achse hat den gleichen Effekt wie eine Spiegelung an der y-Achse.

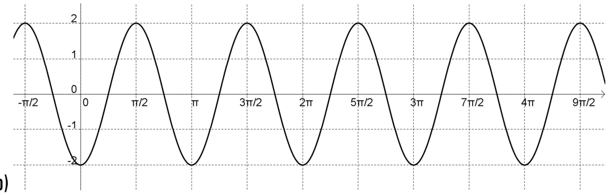
6. Die Graphen der jeweils angegebenen Funktionen sollen, wie ebenfalls angegeben, verändert werden. Stelle die neue Funktionsgleichung auf.

a) $a(x) = \sin(x)$ soll um 3 nach oben verschoben werden, außerdem um 2 nach rechts.
b) $b(x) = \cos(x)$ soll um 1 nach links und 5 nach unten verschoben werden.
c) $c(x) = \sin(x+3)$ soll um 2 nach rechts verschoben werden, dann soll die Amplitude verdoppelt werden.
d) $d(x) = 3\cos(x)$ soll um 5 nach unten verschoben werden, dann soll die Periode halbiert werden.
e) Bei $e(x) = 8\sin(4x)$ soll die Periode halbiert und die Amplitude verdreifacht werden.
f) $f(x) = 0{,}5\cos(0{,}2x+8)$: Periode soll auf ein Fünftel des aktuellen Werts reduziert werden, Amplitude soll sich halbieren.

7. Hier sind zwei Graphen vorgegeben. Bestimme jeweils eine passende Funktionsgleichung. Es gibt jeweils mehrere Möglichkeiten.



a)



b)

8. Gegeben ist die Funktion $ö(x) = 3\sin(x)$.

a) Gib Periodenlänge und Amplitude an.
b) Bestimme die Lage der Nullstellen, Extrema und Wendepunkte innerhalb der ersten Periode.
c) Zeichne den Graphen von ö.
d) Bestimme die Gleichung der Tangente an der Stelle π.

9. Gegeben ist die Funktion $ä(x) = -4\cos(2x)$.

a) Gib Periodenlänge und Amplitude an.
b) Bestimme die Lage der Nullstellen, Extrema und Wendepunkte innerhalb der ersten Periode.
c) Zeichne den Graphen von ä.
d) Bestimme die Gleichung der Tangente am Hochpunkt.
e) Bestimme die Gleichung der Normalen im ersten Wendepunkt der ersten Periode.

Aufgaben im Buch

- S. 245, A. 2
- S. 245, A. 4
- S. 246, A. 6
- S. 245, A. 3
- S. 246, A. 5