Ableitungsregeln

Die Produktregel

Funktionen, die sich als Produkt zweier anderer Funktionen auffassen lassen, muss man auf folgende Weise ableiten:

Allgemeine Regel

$f(x) = u(x) \cdot v(x)$

$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

Beispiel

$f(x) = 3x^2 \cdot \sin x$

$u(x) = 3x^2 \qquad v(x) = \sin x$

$u'(x) = 6x \qquad v'(x) = \cos x$

$f'(x) = 6x \cdot \sin x + 3x^2 \cdot \cos x$

Die Kettenregel

Funktionen, die sich als zwei ineinander verschachtelte Funktionen auffassen lassen, muss man folgendermaßen ableiten:

Allgemeine Regel

$f(x) = u(v(x))$

$f'(x) = v'(x) \cdot u'(v(x))$

Beispiel

$f(x) = (x^2 + 7x)^4$

$u(x) = v^4 \qquad v(x) = x^2 + 7x$

$u'(x) = 4v^3 \qquad v'(x) = 2x + 7$

$f'(x) = (2x + 7) \cdot 4 \cdot (x^2 + 7x)^3$

Korrekter Beweis: http://www.mathematik.uni-trier.de/~mueller/AnalysisI-IV.pdf

Die Quotientenregel

Funktionen, die sich als Quotient zweier Funktionen auffassen lassen, muss man so ableiten:

Allgemeine Regel

$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$

$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$

Beispiel

$f(x) = \frac{5x^2}{\cos x}$

$u(x) = 5x^2 \qquad v(x) = \cos x$

$u'(x) = 10x \qquad v'(x) = -\sin x$

$f'(x) = \frac{10x \cdot \cos x - 5x^2 \cdot (-\sin x)}{(\cos x)^2}$

Die Kenntnis der Quotientenregel ist nur im LK verpflichtend, hat aber auch schon vielen GK-Schülern geholfen.

Alle Funktionen $u(x)$ und $v(x)$ auf dieser Seite müssen differenzierbar sein. Bei der Quotientenregel muss zusätzlich gelten: $v(x)$ darf nicht gleich konstant null sein (an einzelnen Stellen darf sie null sein, dann gibt es Definitionslücken).

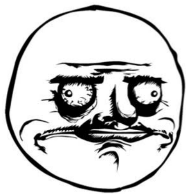
Aufgaben

Bilde jeweils die ersten Ableitung und nenne die Regeln, die du benutzt hast. Manchmal gibt es mehrere sinnvolle Möglichkeiten um abzuleiten. Wenn du fertig bist, bestimme jeweils noch die zweite Ableitung.

$a(x) = e^x \cdot \sin x$	$b(x) = e^{3x^2+5}$	$c(x) = \sin(3x + 2)$
$d(x) = (\sin x)^2$	$e(x) = (x^3 - 2x)^5$	$f(x) = \frac{1}{x^4 + 4^x}$
$g(x) = \sin x \cdot \cos x$	$h(x) = e^{-2x}(4 - 3x^2)$	$i(x) = \frac{5x}{\cos(3x)}$
$j(x) = \sqrt{17x - 4}$	$k(x) = e^{2x-1} - e^{2+x}$	$l(x) = \frac{e^x}{1 + 3x}$
$m(x) = \sqrt[10]{3 \sin x}$	$n(x) = k \cdot x^4 \cdot (7^{-x} + 5)$	$o(x) = \frac{9}{(4 - x^2)^6}$
$p(x) = x^2 \cdot e^{5x} \cdot \sin(-x)$	$q(x) = \sqrt[n]{x + 1}$	$r(x) = \frac{2x}{e^{3-5x}}$
$s(x) = -(\sin x)^8$	$t(x) = -2(x^2 - 9)^3$	$u(x) = -4 \cdot \left(\frac{e^x}{x}\right)$
$v(x) = -8 \sin(x^4)$	$w(x) = e^{\sin x}$	$x(t) = t^t$
$y(x) = x - k^{x+2}$	$z(x) = 4x^2 \cdot 2^{4x}$	$ß(x) = \frac{\cos(kx)}{\sin(kx)}$

Mehr oder minder üble Mathe-Kalauer

Ein Mathematiker hat einen neuen Beweis erstellt und will diesen nun als Bild in seinem Gästezimmer aufhängen. Es ist jedoch leider keiner da, der ihm das Bild aufhängen kann. Kurzentschlossen entscheidet er, das Bild selbst aufzuhängen und nimmt Leiter, Hammer und Nagel. Doch er setzt den Nagel mit dem Kopf zur Wand an. Da ihm dies seltsam vorkommt, kommt er zu dem Entschluss: „Dies ist ein Nagel für die gegenüberliegende Wand."



3 Mathematikstudenten und 3 Physikstudenten fahren Zug. Die Physikstudenten haben 3 Fahrkarten, die Mathematiker nur eine. Als der Schaffner in die Nähe kommt, gehen die drei Mathematiker auf eine Toilette, dieser klopft, die Fahrkarte wird unter der Tür durchgeschoben und abgestempelt zurückgeschoben. Bei der nächsten Zugfahrt haben die Physiker auch nur eine Fahrkarte gekauft, die Mathematikstudenten jedoch gar keine. Bei Herannahen des Schaffners gehen die Physiker auf eine Toilette, die Mathematiker auf die andere. Kurz bevor der Schaffner bei den Toiletten angekommen ist, geht einer der Mathematiker zu der anderen Toilette, klopft, und bittet um die Fahrkarte ...