3. Terme

Lern- und Aufgabenplan

Zum Gebrauch dieses Plans
Im Verlauf der kommenden vier Wochen werden wir uns primär mit der Vorbereitung auf den Mathematikwettbewerb befassen. Gleichzeitig werden wir das Thema „Terme“ behandeln, wenn auch angemessen verkürzt. Die Aufgaben werden in erster Linie so gewählt sein, dass sie zu den Anforderungen des Wettbewerbs passen. Die Überschriften entsprechen diesmal nicht den Überschriften im Buch. Dieser Plan ist auch im Internet und bei Moodle herunterzuladen. Siehe dazu unter **steyvel.com/bildendes** nach.

Definition Term

Ein Term ist „sinnvoller Ausdruck, der Zahlen, Variablen, Symbole für mathematische Verknüpfungen und Klammern enthalten kann. Terme sind die syntaktisch korrekt gebildeten Wörter oder Wortgruppen in der formalen Sprache der Mathematik.“[1]

Syntax = Struktur/Aufbau von Wörtern, Sätzen, Formeln usw.

Wenn Terme **Variablen** enthalten, kann man **Zahlen** für sie **einsetzen**, der Term nimmt dann einen bestimmten **Wert** an.

3.1 Aufstellen eines Terms mit Variablen

→ Buch, Seiten 79 bis 85

Information
Zunächst sollt ihr üben, Terme aufzustellen, für in Termen vorkommende Variablen Zahlen einzusetzen und den Wert des Terms auszurechnen.

Aufgaben

Medium	Seite	Aufgabe	Zu erledigen bis	Taschenrechner	☺	😐	☹
Arbeitsheft	16	1		–			
Arbeitsheft	17	5		–			
Arbeitsheft	17	6		–			
Buch	82	3		ja			
Buch	83	10 (1)–(6)		–			
Buch	83	12		–			

[1] https://de.wikipedia.org/wiki/Term

Erinnerung: Rechengesetze in Termen

Information
Wenn Werte von Termen berechnet werden sollen, müssen bestimmte Rechengesetze eingehalten werden:

Rechengesetz	**Beispiel/Erklärung**
Punkt vor Strich	$3-7\cdot5=3-35=-32$ Hier musst man erst das Produkt aus 7 und 5 berechnen, bevor man es von der 3 subtrahiert.
Potenz vor Punkt	$7\cdot9^2=7\cdot81=567$ Hier muss man erst die Potenz berechnen, bevor man sie mit 7 multipliziert.
Klammern zuerst	Die oben genannten Regeln lassen sich überwinden, wenn man Klammern benutzt. Was in Klammern steht, wird zuerst berechnet. $(3-7)\cdot5=-4\cdot5=-20$ $(7\cdot9)^2=63^2=3969$
Kommutativgesetz	Elemente, zwischen denen ein PLUS oder ein MAL steht, dürfen ohne weiteres vertauscht werden: $x+5=5+x$ $x\cdot11=11\cdot x=11x$ Mit Tricks kann man das Kommutativgesetz auch bei MINUS und GETEILT DURCH benutzen: $y-8=y+(-8)=(-8)+y=-8+y$ $3:x=3\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{x}\cdot3$
Assoziativgesetz	Dieses Gesetz gilt wieder nur bei PLUS und MAL: $a+(b+c)=(a+b)+c$ $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$
Distributivgesetz	Dieses Gesetz ermöglicht das Ausklammern und Ausmultiplizieren. Bitte beachte, dass es in beide Richtungen gilt! $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c=ab+ac$ *…und andere Versionen!*

Alle Rechengesetze werden immer wieder kombiniert!

3.2 Aufbau eines Terms

→ Buch, Seiten 86 bis 87

Benutze die Rechengesetze, um mithilfe verbaler Beschreibungen einen Term aufzustellen.

Aufgaben

Medium	Seite	Aufgabe	Zu erledigen bis	Taschenrechner	☺	😐	☹
Arbeitsheft	20	12		–			

3.3 Zusammenfassen mit Addition und Subtraktion

→ Buch, Seiten 90 bis 98

Wertgleiche Terme

- Zwei Terme heißen **wertgleich** (= **äquivalent**), wenn sich beim Einsetzen derselben Zahl/desselben Zahlenpaares/-tripels/-quadrupels usw. derselbe Wert ergibt.
- Wenn zwei Terme nicht wertgleich sind, können sich trotzdem für bestimmte Zahlenkombinationen dieselben Werte ergeben.
- Wertgleiche Terme lassen sich durch Anwenden der Rechengesetze ineinander umwandeln.

Beispiele

- Die Terme $0{,}2\cdot(uv)^4$ und $\frac{u^4v^4}{5}$ sind wertgleich, weil man sie ineinander umformen kann.
- Die Terme $\frac{1}{3}\cdot xy^6$ und $3\cdot(xy)^5$ sind nicht wertgleich, obwohl sich immer, wenn man für x und/oder y die 0 einsetzt, derselbe Wert ergibt.

Aufgaben

Medium	Seite	Aufgabe	Zu erledigen bis	Taschenrechner	☺	😐	☹
Arbeitsheft	20	14		–			
Buch	93	6		–			
Buch	94	9		–			
Buch	94	10 a		–			

Zusammenfassen mit Addition und Subtraktion

Um besser mit Termen umgehen zu können, möchte man sie häufig zusammenfassen. Die Rechengesetze legen fest, was erlaubt ist und was nicht.

Um uns das klarzumachen, denken wir an Längen, Flächen und Volumina.

Es sollte klar sein, dass man bei dem Term

$3m + 29m^2 + 5m^3$

(mit m = Meter) gar nichts zusammenfassen kann, da es gar keinen Sinn ergibt, Längen, Flächen und Volumina zu addieren oder subtrahieren.

Dagegen ist es gar kein Problem, z.B. diverse Flächen zu addieren und subtrahieren, um beispielsweise anhand der Fläche einzelner Räume die Gesamtfläche einer Wohnung auszurechnen:

$4m^2 + 29m^2 + 11m^2 + 2m^2 + 16m^2 = 62m^2$

Bei Termen ist es genauso: Man darf immer nur solche Elemente **zusammenfassen**, bei denen **Variablen** in der **äquivalenten Form** stehen.

Der Term

$3x + 5x^2 + 2xy - x^2y + 1$

lässt sich in keiner Weise zusammenfassen.

Die folgenden Terme können wir jedoch zusammenfassen, aber manchmal nur teilweise:

$4ba^9 + ba^9 - 2a^9b = 3a^9b = 3ba^9$

$5xy + 2x - 6 + 8yx - 2xy + x + 1$
$= 11xy + 3x - 5$

Aufgaben

Medium	Seite	Aufgabe	Zu erledigen bis	Taschenrechner	☺	😐	☹
Arbeitsheft	22	18		–			
Buch	95	19 a–n		–			
Buch	95	20		–			
Buch	95	21 *		–			
Buch	97	30		–			
Arbeitsheft	21	17		–			

* für Schnelle

3.4 Multiplizieren und Dividieren von Termen

→ Buch, Seiten 99 bis 103

Zunächst multiplizieren wir nur Terme, die selbst nur eine **Zahl**, eine **Variable** oder ein **Produkt** aus **Zahlen** und **Variablen** sind, z.B. $3x$; $4xy$; $9x^3y^5z$.

Eine Aufgabe könnte so aussehen: $2a\cdot(-3b^2)\cdot 4c^3d\cdot 5b^4$

Um diesen Term zusammenzufassen, sollte man in drei Schritten vorgehen:

Schritt	Beschreibung	Überlegung am Beispiel	Resultat
I	Vorzeichen des Resultats bestimmen	Es kommt ein einziges Minus vor, das ist eine ungerade Zahl. Bei einer ungeraden Anzahl negativer Vorzeichen, die miteinander multipliziert werden, ist das Ergebnis auch negativ.	–
II	Koeffizient bestimmen.	Der Koeffizient ist die Zahl, die vor den Variablen steht. Um diesen herauszufinden, muss man die Koeffizienten aus der Aufgabe multiplizieren: $2\cdot3\cdot4\cdot5=120$	120
III	Variablen ordnen und zusammen-fassen	Die meisten Variablen lassen sich in diesem Beispiel nicht zusammenfassen, mit Ausnahme des b: $a\cdot b^2\cdot c^3\cdot d\cdot b^4=a\cdot b^2\cdot b^4\cdot c^3\cdot d=ab^6c^3d$	ab^6c^3d

Aus diesen drei Schritten lässt sich das Gesamtergebnis aufstellen: $\boxed{-120ab^6c^3d}$

Diese drei Schritte muss man nicht aufschreiben, sondern kann sie im Kopf abarbeiten.

Bei Divisionen ist das Aufschreiben als Bruch sinnvoll, um zur Vereinfachung kürzen zu können:

$$-10x:(5y)\cdot 22y^3=-10x\cdot\frac{1}{5y}\cdot 22y^3=\frac{-10x\cdot 22y^3}{5y}=-\frac{2x\cdot 22y^2}{1}=-44xy^2$$

Aufgaben

Medium	Seite	Aufgabe	Zu erledigen bis	Taschenrechner	☺	😐	☹
Arbeitsheft	22	20		–			
Arbeitsheft	22	22		–			
Buch	101	12 def		–			
Buch	102	16 def		–			
Buch	103	25 d–i		–			

3.5 Auflösen einer Klammer

→ Buch, Seiten 104 bis 110

Für das Auflösen einer Klammer benötigen wir nichts weiter als das **Distributivgesetz**:

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c=ab+ac$$

Beispiele

$7k\cdot(5-m)$	$-2x\cdot(3y+4z-5xy)$	$(76p-38q):19p$
$=7k\cdot5+7k\cdot m$	$=-2x\cdot3y+(-2x)\cdot4z-(-2x)\cdot5xy$	$=76p:19p-38q:19p$
$=35k+7km$	$=-6xy-8z+10x^2y$	$=4-2\frac{q}{p}$

Aufgaben

Medium	Seite	Aufgabe	Zu erledigen bis	Taschenrechner	☺	😐	☹
Arbeitsheft	23	25		–			
Buch	106	5 a–l		–			
Buch	106	10 e–h		–			
Buch	107	13 d		–			
Buch	107	16 bcd		–			
Buch	109	26		–			
Buch	110	33 *		–			
Buch	110	36 *		–			

3.6 Minuszeichen vor einer Klammer – Subtrahieren einer Klammer

→ Buch, Seiten 111 bis 112

Steht vor einer Klammer ein Minus oder eine negative Zahl, hat dies zur Folge, dass man beim Auflösen der Klammer einfach alle Vorzeichen in der Klammer umdreht.

$2-(b+3x)=2-b-3x$ $\qquad$ $5t-2(-t+t^2)=5t+2t-2t^2=7t-2t^2$

Aufgaben

Medium	Seite	Aufgabe	Zu erledigen bis	Taschenrechner	☺	😐	☹
Arbeitsheft	24	29		–			
Buch	112	11 bef		–			

3.7 Ausklammern

→ Buch, Seiten 113 bis 115

Manchmal macht es einen Term hübscher, wenn man das **Distributivgesetz** umgekehrt anwendet:

$$ab + ac = a \cdot (b + c)$$

Beispiele

$100x^3 + 500y^4$ $= 100(x^3 + 5y^4)$	$x^2y^4 + x^4y^2 - x^5y^5$ $= x^2y^2(y^2 + x^2 - x^3y^3)$	$\frac{49sk}{24} - \frac{77sg}{36}$ $= \frac{7s}{12}\left(\frac{7k}{2} - \frac{11g}{3}\right)$

Vor die Klammer gehört hier der **größte gemeinsame Teiler (ggT)** der einzelnen Glieder im Term.

Aufgaben

Medium	Seite	Aufgabe	Zu erledigen bis	Taschenrechner	☺	😐	☹
Arbeitsheft	25	34		–			
Arbeitsheft	25	36		–			
Buch	113	3 abc		–			
Buch	114	4 jkl		–			
Buch	114	9 mno		–			
Buch	115	13 acfg		–			

3.8 Auflösen von zwei Klammern in einem Produkt

→ Buch, Seiten 116–118

Beim Multiplizieren zweier Klammern, in denen PLUS oder MINUS vorkommt, muss man jedes Element aus der einen Klammer mit jedem Element aus der anderen Klammer multiplizieren.

Beispiele:

$$(a - b)(x + y) = ax + ay - bx - by$$

$$\begin{aligned}&(2a - 4b + 8c)(3x - 5y)\\&= 2a \cdot 3x - 2a \cdot 5y - 4b \cdot 3x + 4b \cdot 5y + 8c \cdot 3x - 8c \cdot 5y\\&= 6ax - 10ay - 12by + 20by + 24cx - 40cy\end{aligned}$$

Aufgaben

Medium	Seite	Aufgabe	Zu erledigen bis	Taschenrechner	☺	😐	☹
Arbeitsheft	26	39		–			
Arbeitsheft	26	40		–			
Arbeitsheft	27	41		–			
Buch	117	3 f–i		–			
Buch	117	9 adi		–			
Buch	118	14 bdehj		–			

3.9 Binomische Formeln

→ Buch, Seiten 119–121

Dies ist ein Spezialfall des Multiplizierens zweier Klammern. Die beiden Klammern sind dabei entweder gleich oder sehr ähnlich, so dass man Potenzen benutzen kann. Die Binomischen Formeln werden euch noch bis zum Abitur verfolgen. Ihre Unkenntnis kann zu kolossalem Verdruss in der ganzen folgenden Mathematikkarriere führen.

Erste binomische Formel: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
Zweite binomische Formel: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
Dritte binomische Formel: $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

Aufgaben

Medium	Seite	Aufgabe	Zu erledigen bis	Taschenrechner	☺	😐	☹
Arbeitsheft	27	42 a		–			
Arbeitsheft	28	44 b		–			
Buch	120	3 knop		–			
Buch	121	8 cdei		–			
Buch	121	13 abd		–			
Buch	121	14		–			

3.10 Faktorisieren einer Summe

→ Buch, Seiten 122–123

Man kann die Binomischen Formeln auch rückwärts anwenden, um aus einer Summe wieder eine Produkt zu machen. Dazu muss man die binomischen Formeln sehr gut kennen. Damit das Faktorisieren gelingt, kann man wieder dreischrittig vorgehen. Hier ein paar Beispiele:

Schritt	Beschreibung			
I	Anhand der Form die richtige Binomische Formel finden	$c^2-12c+36$ sieht stark nach der 2. B.F. aus.	$9k^2-16s^2$ sieht stark nach der 3. B.F. aus.	$2{,}25r^2+12r+16$ sieht stark nach der 1. B.F. aus.
II	a und b aus der Formel identifizieren.	$a=c$ $b=6$	$a=3k$ $b=4s$	$a=1{,}5r$ $b=4$
III	Produkt aus der B.F. aufstellen	$(c-6)^2$	$(3k-4s)(3k+4s)$	$(1{,}5r+4)^2$

Vorsicht: Möglicherweise muss man einen Term erst umstellen, damit er einer Binomischen Formel ähnlich sieht!

Aufgaben

Medium	Seite	Aufgabe	Zu erledigen bis	Taschenrechner	☺	😐	☹
Arbeitsheft	29	49		–			
Arbeitsheft	30	51 ace		–			
Buch	123	4 dgjnp		–			
Buch	123	6 efgmo		–			
Buch	123	8 ghi *		–			
Buch	123	9 d–i		–			

3.11 Mischungsaufgaben

→ Buch, Seiten 126–127

Aufgaben

Medium	Seite	Aufgabe	Zu erledigen bis	Taschenrechner	☺	😐	☹
Arbeitsheft	30	52		ja			
Buch	127	3		ja			
Buch	127	5		ja			

3.12 Formeln – Gleichungen mit Parametern

→ Buch, Seiten 128–130

Wir bearbeiten dieses Thema anhand von Quadern.
Zunächst besprechen wir Aufgabe 3 auf S. 129 gemeinsam. Wer krank war → Nacharbeiten!
Dann erledige:

Aufgaben

Medium	Seite	Aufgabe	Zu erledigen bis	Taschenrechner	☺	😐	☹
Arbeitsheft	31	53		–			
Buch	129	4		–			
Buch	129	5		–			
Buch	129	7 ab		–			

3.13 Gleichungen der Form $T_1 \cdot T_2 = 0$

→ Buch, Seiten 132–133

Satz vom Nullprodukt
Wenn zwei Elemente a und b multipliziert werden und das Resultat 0 ist, muss mindestens eines der Elemente selbst 0 sein.

$$\boxed{a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ und/oder } b = 0}$$

a und b können Zahlen, Parameter oder Terme sein.

Die Gleichung $T_1 \cdot T_2 = 0$ hat alle Zahlen als Lösungsmenge, für die die Terme T_1 oder T_2 selbst gleich 0 sind.

Beispiel:

Die Gleichung $(z-3)\cdot(z+5)=0$

hat die Lösungsmenge $L=\{3;-5\}$

Aufgaben

Medium	Seite	Aufgabe	Zu erledigen bis	Taschenrechner	☺	😐	☹
Buch	133	1 abefij		–			
Buch	133	4 d–i		–			
Buch	133	5 ade		–			
Arbeitsheft	32	58 *		–			