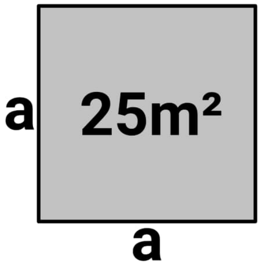
6. Quadratwurzeln und reelle Zahlen

6.1 Quadratwurzeln

→ S. 209–215 im Buch

Was sind Quadratwurzeln und warum heißen sie so?

Nehmen wir an, wir haben ein Quadrat und kennen dessen Flächeninhalt. Wir nehmen an, dieser Flächeninhalt sei 25m².
Wir würden nun aber gerne wissen, wie groß die Seitenlänge a ist. Die meisten werden spontan eine 5 heraushauen und das stimmt ja auch, aber wieso?



Es gilt ja: $a \cdot a = a^2 = 25$. Die Einheit lassen wir beim Rechnen weg. Wir wissen nun einfach aus Erfahrung mit dem kleinen Einmaleins, dass $a = 5$ sein muss, wenn $a \cdot a = 25$ ist.
Um diese Beziehung der 25 zur 5 zu beschreiben, sagt man, dass die Quadratwurzel aus 25 gleich 5 ist. Oder kürzer:

$$a = \sqrt{25} = 5$$

Eine Quadratwurzel aus einer Zahl ist also die Seitenlänge eines Quadrates mit der ursprünglichen Zahl als Flächeninhalt. Das führt zur korrekten …

Definition

Eine Zahl heißt dann **Quadratwurzel aus x,** wenn die Zahl mit sich selbst multipliziert x ergibt.
x heißt hierbei **Radikant.**

Beispiele

$\sqrt{9} = 3$, weil $3 \cdot 3 = 9$ $\sqrt{\frac{64}{9}} = \frac{8}{3}$, weil $\frac{8}{3} \cdot \frac{8}{3} = \frac{64}{9}$ $\sqrt{8100} = 90$, weil $90 \cdot 90 = 8100$.

Vorsicht bei negativen Radikanten!

Sobald der Radikant negativ ist, also z.B. bei $\sqrt{-9}$,
dann existiert diese Wurzel nicht reell, denn $3 \cdot 3 = 9$ und auch $(-3) \cdot (-3) = 9$.
Wurzeln aus negativen Zahlen gibt es nur in den *komplexen Zahlen,* die man aber frühestens kurz vor dem Abi in der Schule thematisiert.

Vorsicht: Eindeutige Wurzel!

Obwohl auch $(-6) \cdot (-6) = 36$ ist, ist die Wurzel aus 36 nur 6, damit die Wurzel eindeutig ist.

Aufgaben

Medium	Seite	Aufgabe	Zu erledigen bis	Taschenrechner	☺	😐	☹
Arbeitsheft	56	1		–			
Buch	210	4		–			
Buch	210	5		–			
Buch	210	6		–			
Buch	210	7		–			
Arbeitsheft	56	2		–			
Buch	212	2		ja			
Buch	212	3		ja			
Buch	212	4		ja			
Buch	212	7		ja			

6.2 und 6.7 Zahlenbereiche

Hierzu gehören die Bereiche im Buch
6.2 Reelle Zahlen
6.7 Vergleich der Zahlenbereiche $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}_+$, $\mathbb{Q}$ *und* $\mathbb{R}$

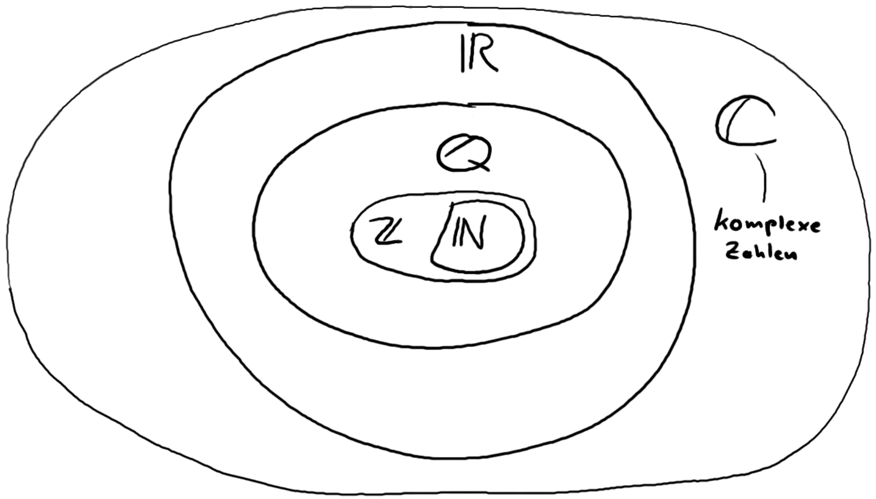
Der einfachste Zahlenbereich sind die **natürlichen Zahlen**. Dieser Bereich enthält alle positiven, ganzen Zahlen:
$\mathbb{N} := \{1,2,3,4,5,...\}$. Um 0 erweitert: $\mathbb{N}_0 := \{0,1,2,3,4,5,...\}$

Bei den **ganzen Zahlen** kommen die negativen ganzen Zahlen dazu:
$\mathbb{Z} := \{...-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,...\}$

Die **rationalen Zahlen** enthalten nun sämtliche Brüche, die man aus ganzen Zahlen bilden kann:
$\mathbb{Q} := \left\{\frac{p}{q} \mid p,q \in \mathbb{Z}\right\}$

Beachte: Auch alle ganzen Zahlen und alle endlichen und alle periodischen Kommazahlen lassen sich als Brüche ganzer Zahlen schreiben, siehe S. 213 im Buch.
Die **reellen Zahlen** $\mathbb{R}$ enthalten nun außer den rationalen Zahlen auch alle Zahlen, die sich nicht als Brüche ganzer Zahlen schreiben lassen. Sie heißen *irrationale Zahlen*. Irrationale Zahlen sind viele Quadratwurzeln, die Kreiszahl Pi, die Eulersche Zahl e und viele mehr. Die reellen Zahlen versammeln also alle rationalen und irrationalen Zahlen.

Jeder höhere Zahlenbereich enthält alle niedrigeren. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.



Satz
Wurzeln aus Zahlen, die keine Quadratzahlen sind, sind immer irrational, z.B.:
$\sqrt{2} = 1{,}4142135623730950488016887242097...$
$\sqrt{1000} = 31{,}622776601683793319988935444327...$ *Beweis an der Tafel.*

Aufgaben

Medium	Seite	Aufgabe	Zu erledigen bis	Taschenrechner	☺	😐	☹
Arbeitsheft	57	6		ja			
Arbeitsheft	60	17		–			
Buch	215	4 abdhj		–			
Buch	215	5 a		ja			
Buch	215	6 abd		–			
Buch	215	7 ajo		–			
Buch	217	8		–			
Buch	217	10 *		–			
Buch	234	3		ja			
Buch	234	4 *		ja			
Buch	234	5		ja			
Buch	234	6		ja			

6.3. Intervallhalbierungsverfahren

→ S. 218–221 im Buch

Als man irrationale Quadratwurzeln nicht einfach in Taschenrechner eingeben oder zumindest aus Tabellen ablesen konnte, musste man Näherungswerte aufwändig per *Intervallschachtelung* bestimmen. Wie das geht, wird an einem Beispiel beschrieben.

Es soll die Quadratwurzel von 5 annähernd bestimmt werden.

1.	Überlegen, zwischen welchen ganzen Zahlen $\sqrt{5}$ vermutlich liegt.	Das müssten 2 und 3 sein, denn $2^2 = 4 < 5 < 9 = 3^3$
2.	Den Mittelwert der beiden Zahlen quadrieren.	$2{,}5^2 = 6{,}25$
3.	Das Ergebnis ist größer als 5, also liegt $\sqrt{5}$ zwischen 2 und 2,5 (nicht zwischen 2,5 und 3). Daher nehmen wir nun den Mittelwert von 2 und 2,5 und quadrieren diesen.	$2{,}25^2 = 5{,}0625$
4.	Das Ergebnis ist immer noch größer als 5, also nehmen wir eine Zahl zwischen 2 und 2,25 und quadrieren diese, bleiben wegen der vorigen Zeile aber näher an der 2,25.	$2{,}2^2 = 4{,}84$
5.	Das Ergebnis ist nun kleiner als 5, also steigern wir den Wert wieder zu einer Zahl näher an 2,25.	$2{,}24^2 = 5{,}0176$
6.	Das Ergebnis ist wieder größer als 5, also senken wir den Wert ein bisschen.	$2{,}23^2 = 4{,}9729$
7.	Wir wissen zumindest, dass die Lösung zwischen 2,23 und 2,24 liegen muss und testen deren Mittelwert.	$2{,}235^2 = 4{,}995225$

Das letzte Resultat ist schon sehr dicht an der 5. Man kann das Verfahren noch beliebig lang weiterspielen, um noch genauere Resultate zu erhalten.

Aufgaben

Medium	Seite	Aufgabe	Zu erledigen bis	Taschenrechner	☺	😐	☹
Arbeitsheft	57	7		Nur zum Quadrieren. Vorsicht! Über der 3. Spalte ist das ² zu viel.			
Buch	219	1 abc		Nur zum Quadrieren.			

Rechenregeln für Quadratwurzeln

Hierzu gehören die Bereiche im Buch 6.4; 6.5 und 6.6 (S. 222–232)

Die wichtigsten Rechengesetze

$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$	$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$	$\sqrt{a^2}=\lvert a\rvert$
$\sqrt{a}\pm\sqrt{b}\neq\sqrt{a\pm b}$	$\sqrt{a^2\pm b^2}\neq a\pm b$	$-1\cdot\sqrt{b}\neq\sqrt{(-1)^2 b}=\sqrt{b}$
$\sqrt{a^2 b}=\lvert a\rvert\sqrt{b}$	$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b^2}}=\frac{\sqrt{a}}{\lvert b\rvert}$	$\frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{b}}=\frac{\lvert a\rvert}{\sqrt{b}}$

Hier gilt jeweils, sofern nötig $a,b\geq 0$ bzw. $b\neq 0$.
Die Ungleichheiten gelten allgemein. In Spezialfällen kann es eine Gleichheit geben.

Nicht vergessen!

Kommutativgesetz	$a+b=b+a \qquad a\cdot b=b\cdot a$
Assoziativgesetz	$a+(b+c)=(a+b)+c \qquad a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$
Distributivgesetz	$a\cdot(b+c)=ab+ac \quad =ba+ca=(b+c)\cdot a$ $a\cdot(b-c)=ab-ac \quad =ba-ca=(b-c)\cdot a$ $(b+c):a=b:a+c:a=\frac{b}{a}+\frac{c}{a}$ $(b-c):a=b:a-c:a=\frac{b}{a}-\frac{c}{a}$
Binomische Formeln	$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

Aufgaben

Medium	Seite	Aufgabe	Zu erledigen bis	Taschenrechner	☺	😐	☹
Arbeitsheft	57	8		–			
Arbeitsheft	57	9		–			
Arbeitsheft	58	10		–			
Arbeitsheft	58	11		–			
Arbeitsheft	58	12		–			
Arbeitsheft	60	15		–			
Buch	224	4 abcehi		–			
Buch	224	5 adfh		–			
Buch	224	6 aceg		–			
Buch	224	7 adeh		–			
Buch	225	10 acdf		–			
Buch	225	13 acdfg		–			
Buch	225	14		–			
Buch	229	7 abdfh		–			
Buch	229	11 cfhno		–			
Buch	229	13 acdei		–			
Buch	230	15 abgikl		–			
Buch	230	16		–			
Buch	232	1 abcfh		–			
Buch	232	2 abdeh		–			
Buch	232	5 bde		–			

*Das ist keine Quadratwurzel,
sondern ein entwurzelter Baum.*